

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А.М. Продеус

Комп'ютерна обробка акустичних сигналів Практикум

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 171 «Електроніка»,
спеціалізацією «Акустичні електронні системи та технології обробки акустичної
інформації»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензент: *Шуляк О. П.*, к.т.н., доцент кафедри електронної інженерії
НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»
Відповідальний редактор: *Лазебний В.С.*, к.т.н., доцент

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 18.06.2020 р.)
за поданням Вченої ради факультету електроніки (протокол № 05/2020 від 25.05.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Продаєус Аркадій Миколайович, д-р техн. наук, проф.

Комп'ютерна обробка акустичних сигналів

Практикум

Комп'ютерна обробка акустичних сигналів: Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізації «Акустичні електронні системи та технології обробки акустичної інформації» / А. М. Продаєус; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,4 Мбайт (.doc); 2,2 Мбайт (.pdf)). - Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 54 с.

Даний навчальний посібник складається з двох частин. Перша частина містить 34 задачі, що охоплюють найбільш важливі теми дисциплін «Методи обробки акустичних сигналів» та «Комп'ютерна обробка акустичних сигналів», такі як оцінювання законів розподілу та параметрів випадкових процесів, спектрально-кореляційний аналіз процесів та лінійних систем, перетворення випадкових процесів нелінійними безінерційними системами, виявлення сигналів на тлі перешкод, цифрова фільтрація сигналів. Друга частина навчального посібника містить стислі теоретичні відомості, приклади розв'язання задач та відповіді до кожної із задач.

Даний навчальний посібник забезпечує проведення комп'ютерних практикумів з дисципліни «Комп'ютерна обробка акустичних сигналів» для студентів рівня підготовки "Магістр".

Крім того, навчальний посібник буде корисним для студентів акустичних та телекомунікаційних спеціальностей технічних навчальних закладів, що навчаються за спеціальністю «Електроніка», а також фахівцям в галузі акустичної експертизи та корекції комунікаційних каналів.

© А. М. Продаєус, 2020
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

ЗМІСТ

Частина 1. Умови задач	4
Оцінювання густини ймовірності стаціонарного випадкового процесу (СВП)	4
Перетворення випадкових процесів нелінійними безінерційними системами	4
Спектрально-кореляційний аналіз процесів та лінійних систем	4
Оцінювання параметрів стаціонарних випадкових процесів	5
Виявлення сигналів на тлі перешкод	6
Цифрова фільтрація	7
 Частина 2. Теоретичні відомості та коментарі до розв'язання задач	 8
Оцінювання густини ймовірності стаціонарного випадкового процесу	8
Перетворення випадкових процесів нелінійними безінерційними системами ...	11
Спектрально-кореляційний аналіз процесів та лінійних систем	16
Оцінювання параметрів стаціонарних випадкових процесів	25
Виявлення сигналів на тлі перешкод	33
Цифрова фільтрація	52
 Література	 56

Частина 1. Умови задач

Оцінювання густини ймовірності стаціонарного випадкового процесу (СВП)

1. Розрахувати об'єм експериментальної вибірки значень СВП $X(t)$, що необхідна для досягнення 1%-ної повної похибки вимірювань густини ймовірності СВП $X(t)$, за умов: а) є апіорна інформація, що закон розподілу СВП $X(t)$ близький до рівномірного з параметрами $a=0$; $b=1$; б) похибка розглядається лише в межах пласкої частини густини ймовірності; в) густина ймовірності оцінюється з кроком $\Delta x=0,1$.
2. Визначити відносну повну середньоквадратичну похибку вимірювань густини ймовірності СВП $X(t)$, за умов: а) є апіорна інформація, що закон розподілу СВП $X(t)$ близький до нормального з параметрами розподілу $[0;1]$; б) густина ймовірності оцінюється з кроком $\Delta x=0,1$; в) довжина відрізка СВП $X(t)$ обмежена $N=100000$ дискретними некорельованими значеннями.

Перетворення випадкових процесів нелінійними безінерційними системами

3. Довести, що для вимірювання ефективного значення гаусового центрованого ергодичного процесу $X(t)$ можна використовувати схему з лінійним двопівперіодним детектором.
4. Визначити закон розподілу СВП на виході квадратичного детектора за умов: а) квадратичний детектор виконує перетворення $y = ax^2$; б) на вхід квадратичного детектора подається нормальний СВП $X(t)$ з параметрами розподілу $[m_x, \sigma_x]$.
5. Визначити закон розподілу СВП на виході двостороннього обмежувача за умов: а) двосторонній обмежувач має характеристику
$$y = G(x) = \begin{cases} 1, & x > 1; \\ x, & -1 \leq x \leq 1; \\ -1, & x < -1 \end{cases}$$
 б) на вхід двостороннього обмежувача подається нормальний СВП $X(t)$ з параметрами розподілу $[0;1]$.

Спектрально-кореляційний аналіз процесів та лінійних систем

6. Визначити параметри найпростішого низькочастотного фільтру (НЧ) фільтру у вигляді RC -ланцюжка, що має смугу пропускання 5 кГц на рівні -3 дБ. Параметри, що потрібно визначити: а) значення добутку RC ; б) граничну частоту f_c , де потужність вихідного сигналу знижується на 30 дБ, порівняно з такою на частоті $f = 0$.
7. Визначити параметри НЧ фільтру у вигляді двох послідовно з'єднаних RC -ланцюжків, що має смугу пропускання 5 кГц на рівні -3 дБ. Параметри, що потрібно визначити: а) значення добутку RC ; б) граничну частоту f_c , де потужність вихідного сигналу на 30 дБ знижується, порівняно з такою на частоті $f = 0$.
8. Визначити ефективний інтервал кореляції СВП на виході НЧ фільтру у вигляді RC -ланцюжка, що має смугу пропускання 5 кГц на рівні -3 дБ та за умов, що на вхід НЧ фільтру подається білий шум із спектральною густиною потужності $N_0/2$.
9. Визначити ефективний інтервал кореляції СВП на виході НЧ фільтру у вигляді двох послідовно з'єднаних RC -ланцюжків, що має смугу пропускання 5 кГц на рівні -3 дБ та за

умов, що на вхід НЧ фільтру подається білий шум із спектральною густиною потужності $N_0/2$.

10. Визначити виграш у відношенні сигнал-шум за рахунок використання НЧ фільтру у вигляді RC -ланцюжка, що має смугу пропускання 5 кГц на рівні -3дБ, якщо на вхід RC -ланцюжка подається адитивна суміш гармонічного сигналу частотою 1 кГц та обмеженого за частотою ($f_c = 20$ кГц) білого шуму.
11. Визначити виграш у відношенні сигнал-шум за рахунок використання НЧ фільтру у вигляді двох послідовно з'єднаних RC -ланцюжків, що має смугу пропускання 5 кГц на рівні -3 дБ, якщо на вхід фільтру подається адитивна суміш гармонічного сигналу та обмеженого за частотою ($f_c = 20$ кГц) білого шуму.
12. Визначити спектр потужності відгуку фільтра з гаусівською амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) на резонансній частоті f_{02} , що збуджується процесом з виходу аналогічного фільтру на резонансній частоті f_{01} , що в свою чергу збуджується білим шумом. Прийняти полоси пропускання обох фільтрів однаковими.

Оцінювання параметрів стаціонарних випадкових процесів

13. Визначити границі 95%-го довірчого інтервалу оцінки математичного чекання ергодичного по відношенню до МЧ дискретного білого шуму $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, за умови, що $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$, складається із $N = 100$ значень. Розглянути дві ситуації: а) апіорі відомо, що $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$ може бути нормальним процесом із параметрами розподілу $[0; 1]$; б) апіорі нічого не відомо про закон розподілу $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$
14. Визначити границі 95%-го довірчого інтервалу оцінки математичного чекання ергодичного по відношенню до МЧ дискретного СВП $Y(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$, котрий одержано шляхом ковзного усереднення за 4 значеннями дискретного білого шуму $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ ($N = 100$). Розглянути дві ситуації: а) апіорі відомо, що $X(i\Delta t)$ може бути нормальним процесом із параметрами розподілу $[0; 1]$; б) апіорі нічого не відомо про закон розподілу $X(i\Delta t)$.
15. Визначити границі 95%-го довірчого інтервалу оцінки дисперсії ергодичного по відношенню до дисперсії дискретного нормального білого шуму $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$, за умов, що $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$, складається із 100 значень. Розглянути дві ситуації: а) апіорі відомо, що $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$ може мати параметри розподілу $[0; 1]$; б) апіорі нічого не відомо про значення параметрів закону розподілу $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$
16. Визначити границі 95%-го довірчого інтервалу оцінки дисперсії ергодичного по відношенню до дисперсії дискретного СВП $Y(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$, за умов, що СВП $Y(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$ одержано шляхом ковзного усереднення за 4 значеннями нормального дискретного білого шуму $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ ($N = 100$). Розглянути дві ситуації: а) апіорі відомо, що $X(i\Delta t)$ може мати параметри розподілу $[0; 1]$; б) апіорі нічого не відомо про значення параметрів закону розподілу $X(i\Delta t)$.
17. Визначити границі 95%-го довірчого інтервалу нульового та першого значень оцінки автокореляційної функції ергодичного по відношенню до кореляційної функції дискретного нормального білого шуму з $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$, за умов, що СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$, складається із 100 значень з параметрами розподілу $[0; 1]$.

18. Визначити границі 95%-го довірчого інтервалу нульового та четвертого значень оцінки автокореляційної функції ергодичного по відношенню до кореляційної функції дискретного СВП $Y(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$, за умов: а) СВП $Y(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$ одержано шляхом ковзного усереднення за 4 значеннями нормального дискретного білого шуму $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$ з параметрами розподілу $[0; 1]$; б) СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$, складається із 100 значень.

Виявлення сигналів на тлі перешкод

19. Визначити виграш у відношенні сигнал-шум за рахунок використання цифрового спектрального аналізу суміші гармонічного сигналу з випадковою початковою фазою та обмеженого по частоті білого шуму за умов: а) оцінка спектру потужності має вигляд “сирої” періодограми; б) частота гармонічного сигналу співпадає з вузлом сітки частот дискретного перетворення Фур’є; в) в розпорядженні інженера є 1024 вибірки процесу, що аналізується; г) відношення сигнал-шум визначається як відношення математичних чекань сигналу й шуму на виході спектроаналізатору.
20. Визначити максимальний програш у відношенні сигнал-шум за рахунок неспівпадання частоти гармонічного сигналу з вузлом сітки частот дискретного перетворення Фур’є при цифровому спектральному аналізі суміші гармонічного сигналу з випадковою початковою фазою та обмеженого по частоті білого шуму за умов: а) оцінка спектру потужності має вигляд “сирої” періодограми; г) відношення сигнал-шум визначається як відношення математичних чекань сигналу й шуму на виході спектроаналізатору.
21. Розрахувати основні параметри цифрового спектрального аналізу СВП за методом Бартлета за умов: а) апіорі відомо, що СВП є низькочастотним шумовим процесом із спектром, верхня гранична частота якого не перевищує 20 кГц; б) спектр СВП може вважатися практично рівномірним в смузі частот 500 Гц; в) бажано, щоб середньоквадратична похибка вимірювань спектру не перевищувала 5% та визначалася б практично цілком випадковою складовою похибки.
22. Розрахувати основні параметри цифрового спектрального аналізу СВП за методом Бартлета за умов: а) апіорі відомо, що СВП є сумішшю декількох неперервних гармонічних сигналів, з мінімальною різницею між частотами 200 Гц, та низькочастотного шумового процесу із спектром, верхня гранична частота якого не перевищує 20 кГц; б) спектр СВП може вважатися практично рівномірним в смузі частот 500 Гц; в) бажано, щоб середньоквадратична похибка вимірювань спектру на ділянках «чистого» шуму не перевищувала 5%.
23. Спланувати експеримент з вимірювання акустичних характеристик кімнати з використанням генератора шуму, вимірювального мікрофону, звукової карти персонального комп’ютера та відповідного програмного забезпечення.
24. Обґрунтувати, в яких випадках при вимірюванні акустичних характеристик кімнати доцільно використовувати генератор рожевого шуму, а в яких – білого шуму.
25. Визначити виграш у відношенні сигнал-шум при оптимальному виявленні сигналу з відомими параметрами на тлі обмеженого по частоті білого шуму за умов: а) сигнал – це відрізок довжиною 1с гармонічного сигналу $\nu(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ із параметрами: $A = 1$ В, $f_0 = 1$ кГц, $\varphi_0 = 0$; б) верхня гранична частота обмеженого по частоті білого шуму дорівнює $f_g = 5$ кГц, стандартне відхилення шуму $\sigma_{ш} = 1$ В.
26. Визначити граничне відношення сигнал-шум q_n , що забезпечує оптимальне виявлення сигналу на фоні перешкод з ймовірністю правильного виявлення $D = 0,9$ при фіксованій

ймовірності помилкової тривоги $F = 10^{-6}$ за умов: а) сигнал – це відрізок довжиною 1с гармонічного сигналу $v(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ із параметрами: $A = 1\text{В}$, $f_0 = 2\text{кГц}$, $\varphi_0 = \pi/2$; б) верхня гранична частота обмеженого по частоті білого шуму дорівнює $f_g = 6\text{кГц}$, стандартне відхилення шуму $\sigma_u = 2\text{В}$.

27. Визначити граничне відношення сигнал-шум q_n , що забезпечує оптимальне виявлення сигналу на фоні перешкод з ймовірністю $D = 0,9$ при фіксованій ймовірності помилкової тривоги $F = 10^{-6}$ за умов: а) сигнал – це відрізок довжиною 1с гармонічного сигналу $v(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ із параметрами: $A = 1\text{В}$, $f_0 = 3\text{кГц}$, φ - випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 2\pi]$; б) верхня гранична частота обмеженого по частоті білого шуму дорівнює $f_g = 6\text{кГц}$, стандартне відхилення шуму $\sigma_u = 2\text{В}$.

28. Порівняти порогові відношення сигнал-шум на виходах двох оптимальних виявлювачів: а) виявлювач відомого вузькосмугового сигналу; б) виявлювач вузькосмугового сигналу з невідомою початковою фазою. Умови порівняння: а) ймовірність правильного виявлення $D = 0,9$ при фіксованій ймовірності помилкової тривоги $F = 10^{-6}$.

29. Визначити величину порогу U_0 для забезпечення ймовірності неправильної тривоги $F = 10^{-6}$ оптимального виявлювача відомого вузькосмугового сигналу, за умов: а) сигнал – це відрізок довжиною 1с гармонічного сигналу $v(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ із параметрами: $A = 1,4\text{В}$, $f_0 = 2\text{кГц}$, $\varphi_0 = \pi/2$; б) верхня гранична частота обмеженого по частоті білого шуму дорівнює $f_g = 6\text{кГц}$, стандартне відхилення шуму $\sigma_u = 1\text{В}$.

Цифрова фільтрація

30. Розрахувати цифровий нерекурсивний НЧ фільтр 6-го порядку із прямокутним ваговим вікном та за умов: а) частота дискретизації $F_d = 10\text{кГц}$; б) верхня гранична частота фільтру $f_g = 2,5\text{кГц}$.

31. Відомо, що аналітичний вираз частотної характеристика КІХ-фільтру має вигляд:

$$H_D(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(-j\omega k T_D). \text{ Спростіть цей аналітичний вираз для випадків парних (} \\ a_k = a_{-k} \text{) й непарних (} a_k = -a_{-k} \text{) коефіцієнтів фільтру.}$$

32. Відкоригуйте коефіцієнти НЧ КІХ-фільтру 6-го порядку:

$$a_0 = 0.5; \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi} = 0.3183; \quad a_2 = a_{-2} = 0; \quad a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi} = -0.1061.$$

із застосуванням трикутного вагового вікна.

33. Доведіть, що передатна функція рекурсивного фільтра, що описується рівнянням:

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M b_k y(n-k),$$

визначається співвідношенням:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}},$$

причому $b = 1$.

34. Одне з можливих рівнянь фільтра-інтегратора, має вигляд:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{T_0}{2} x_{n-1} + \frac{T_0}{2} x_n.$$

Знайдіть аналітичний вираз частотної характеристики цього фільтра.

Частина 2. Теоретичні відомості та коментарі до розв'язання задач Оцінювання густини ймовірності стаціонарного випадкового процесу

Задача 1.

Основні теоретичні відомості

Сутність гистограмного методу оцінки густини ймовірностей на прикладі випадкової величини X полягає ось у чому. Припустимо, що в нашому розпорядженні результати спостережень неперервної випадкової величини (ВВ) X . Розділимо весь діапазон значень на інтервали або «розряди» і підрахуємо кількість значень m_i , що доводяться на кожний i -той розряд. Це число розділимо на загальне число спостережень n і в такий спосіб знайдемо частоту, що відповідає даному розряду:

$$W_i^* = \frac{m_i}{n}.$$

Сума частот усіх розрядів, мабуть, повинна дорівнювати одиниці.

Якщо мова йде про оцінку густини ймовірності СВП, тоді оцінку $\tilde{W}(x, \Delta x)$ густини ймовірності влучення СВП $X(t)$ у Δx -ділянку значення x можна представити у виді відносного часу перебування, поділеного на розмір інтервалу Δx (рис. 1.1):

$$\tilde{W}(x, \Delta x) = \frac{T_x}{T \Delta x}, \quad T_x = \sum_j \Delta t_j.$$

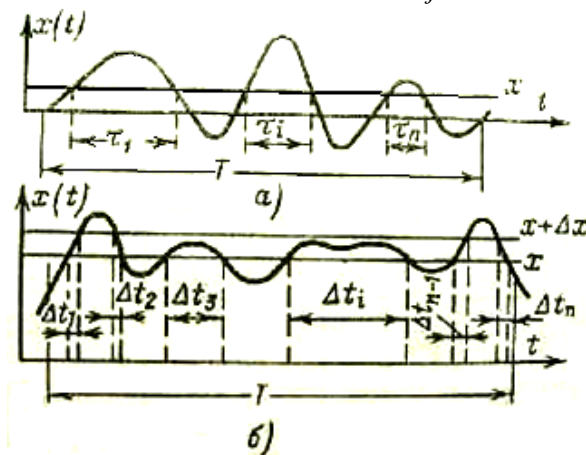


Рис. 1.1

Якщо маємо справу з дискретизованим процесом $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$, тоді

$$\tilde{W}(x, \Delta x) = \frac{N_x}{N \Delta x}, \quad N_x = T_x / \Delta t, \quad N = T / \Delta t.$$

Структурну схему відповідного вимірювального пристрою або алгоритму вимірювання показано на рис. 1.2.



Рис. 1.2

Зміщення оцінки, одержаної гістограмним методом:

$$\Delta[\tilde{W}(x, \Delta x)] = \langle \tilde{W}(x, \Delta x) \rangle - W(x) = \frac{(\Delta x)^2}{24} W''(x).$$

Дисперсія оцінки:

$$D[\tilde{W}(x, \Delta x)] \approx \frac{W(x)}{\Delta x N}$$

Квадрат повної похибки вимірювань:

$$\varepsilon^2[\tilde{W}(x)] = \langle (\tilde{W}(x) - W(x))^2 \rangle = D[\tilde{W}(x)] + \Delta^2[\tilde{W}(x)] \approx \frac{W(x)}{\Delta x N} + \left[\frac{(\Delta x)^2 W''(x)}{24} \right]^2.$$

Повна похибка вимірювань:

$$\varepsilon[\tilde{W}(x)] \approx \sqrt{\frac{W(x)}{\Delta x N} + \left[\frac{(\Delta x)^2 W''(x)}{24} \right]^2}.$$

Аналітичні розрахунки та чисельний розв'язок задачі

Відносна повна похибка вимірювань:

$$\frac{\varepsilon[\tilde{W}(x)]}{W(x)} \approx \sqrt{\frac{1}{\Delta x N W(x)} + \left[\frac{(\Delta x)^2 W''(x)}{24 W(x)} \right]^2} = 0.01$$

Звідси:

$$\frac{1}{\Delta x N W(x)} + \left[\frac{(\Delta x)^2 W''(x)}{24 W(x)} \right]^2 = 0.0001.$$

Рівномірний закон розподілу має вигляд:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{інших } x \end{cases}$$

В пласкій частині:

$$W''(x) = 0.$$

Звідси:

$$\Delta x N W(x) = \frac{\Delta x N}{b-a} = 10000$$

або

$$\Delta x N = 10000(b-a).$$

Для $a=0$, $b=1$:

$$\Delta x N = 10000.$$

Для $\Delta x=0.1$ одержуємо $N=100000$.

Моделювання на ПЕОМ

План модельного експерименту:

- 1) генерування 100000 некорельованих значень рівномірно розподіленої в інтервалі [0,1] випадкової величини;
- 2) побудова гістограми;
- 3) порівняння гістограми з теоретичним розподілом.

Для виконання цього плану в командному вікні програми Matlab треба буде виконати команди:

```
>> N=100000;
>> x=rand(1,N);
>> dx=0.1;
>> [n,xout]=hist(x);
>> n=n/N/dx;
>> bar(xout,n)
```

Примітка: ці ж команди можна виконати й в автоматичному режимі, шляхом створення m-файлу. Одержану програму треба потім запустити на виконання командою **Run**.

В результаті комп'ютерного моделювання одержуємо гістограму розподілу (рис. 1.3) значень генерованої чисельної послідовності, тобто графік оцінки густини ймовірності рівномірно розподіленої ВВ:

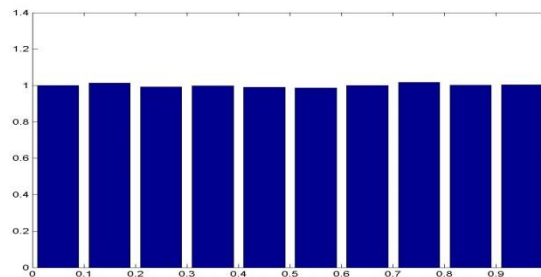


Рис. 1.3

Побудуємо графік різниці (рис. 1.4) оцінки й теоретичної густини ймовірності:

```
>> del=n-1;
>> bar(xout,del)
```

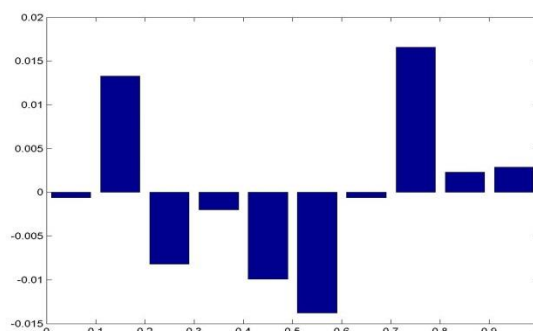


Рис. 1.4

Зіставимо результати аналітичних розрахунків з результатами моделювання на ПЕОМ. Ще до проведення чисельного експерименту слід було чекати, що максимальні відхилення гістограми від теоретичного розподілу будуть дещо більшими, ніж 1%, внаслідок того, що максимальне відхилення завжди більше, ніж середньоквадратична похибка. Якщо вважати похибку нормально розподіленою, тоді за правилом “3-х сігма” з вірогідністю 0.997 максимальне відхилення може сягнути 3%. Дійсно, при проведенні модельного експерименту було одержано максимальне відхилення близько 1,5%, що знаходиться в очікуваних межах.

Таким чином, бачимо, що результати теоретичних розрахунків добре узгоджуються з результатами модельного експерименту.

Відповідь: $N = 100000$.

Задача 2

Відповідь: аналітичний вираз для повної середньоквадратичної похибки вимірювань густини ймовірності СВП $X(t)$ має вигляд:

$$\delta(x) = \left(\frac{\sqrt{\pi} e^{x^2}}{\Delta x N} + \left[\frac{(\Delta x)^2 (1 - 2x^2)}{12} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Підставляючи $\Delta x=0,1$ та $N=100000$, для фіксованих значень $x=0$ та $x=2$ одержуємо відповідно $\delta(x)=0,0133; 0.0987$.

Перетворення випадкових процесів нелінійними безінерційними системами

Задача 3

Основні теоретичні відомості

Нелінійні елементи є типовою ланкою вимірювальних систем. Наприклад, вимірювач дисперсії центрованого СВП $X(t)$ складається з квадратора й інтегратора:

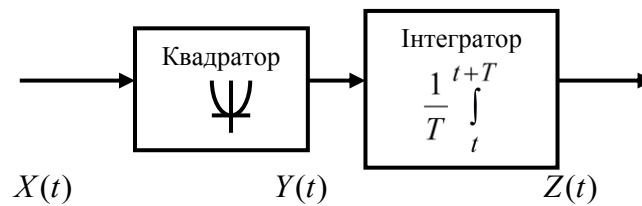


Рис. 3.1

В наведеній схемі інтегратор виконує функцію оцінювача математичного чекання (МЧ) процесу $Y(t)$ на виході квадратичного двопівперіодного детектора. Таким чином, маємо спершу довести, що МЧ процесу $Y(t)$ пропорційне дисперсії процесу $X(t)$. А потім аналогічним чином маємо розглянути ситуацію, коли замість квадратичного двопівперіодного детектора встановлено лінійний двопівперіодний детектор.

МЧ процесу $Y(t)$ на виході довільного нелінійного елемента може бути знайдено двома способами.

Спосіб 1: використовується формула

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y W_2(y) dy,$$

де $W_2(y)$ - розподіл ймовірностей процесу $Y(t)$ на виході того чи іншого детектора.

Спосіб 2: для квадратичного детектора використовується формула

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_1(x) dx,$$

де $W_1(x)$ - розподіл ймовірностей процесу $X(t)$, а для лінійного детектора – формула

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} |x| W_1(x) dx,$$

Тотожність обох способів базується на рівності елементарних ймовірностей на вході й виході нелінійного елемента:

$$W_1(x) dx = W_2(y) dy.$$

Як бачимо, аналітичні розрахунки простіше робити за другим способом – в цьому разі не треба обчислювати $W_2(y)$. Але ми проведемо аналітичні розрахунки за обома способами. Таким чином можна буде перевірити вірність одержаних результатів.

Аналітичні розрахунки

Розподіл ймовірностей центрованого процесу $X(t)$:

$$W_1(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Розподіл ймовірностей на виході квадратичного детектора з характеристикою $y = ax^2$:

$$\begin{aligned}
 W_2(y) &= W_1[g_1(y)]|g'_1(y)| + W_1[g_2(y)]|g'_2(y)|, \\
 g_1(y) &= \left(\frac{y}{a}\right)^{1/2}; \quad g'_1(y) = \frac{1}{2a}\left(\frac{y}{a}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{ay}}; \\
 g_2(y) &= -\left(\frac{y}{a}\right)^{1/2}; \quad g'_2(y) = -\frac{1}{2\sqrt{ay}}; \\
 W_2(y) &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{ay}} \{W_1(\sqrt{y/a}) + W_1(-\sqrt{y/a})\}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0; \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi ay}} e^{-\frac{y}{2a\sigma_x^2}}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розподіл ймовірностей на виході лінійного детектора з характеристикою $y = a|x|$:

$$\begin{aligned}
 g_1(y) &= \frac{y}{a}; \quad g'_1(y) = \frac{1}{a}; \\
 g_2(y) &= -\frac{y}{a}; \quad g'_2(y) = -\frac{1}{a}; \\
 W_2(y) &= W_1\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{a} + W_1\left(-\frac{y}{a}\right)\frac{1}{a} = \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{a\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2\sigma_x^2}\right), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Для спрощення подальших викладок приймаємо $a = 1$.

Тоді для **квадратичного детектора** маємо:

Спосіб 1:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y W_2(y) dy = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{1/2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_x^2}\right) dy = \sigma_x^2;$$

Спосіб 2:

$$m_y = 2 \int_0^{\infty} x^2 W_1(x) dx = \frac{2}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) dx = \sigma_x^2,$$

Для **лінійного детектора** маємо:

Спосіб 1:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y W_2(y) dy = \frac{2}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}\right) dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x,$$

Спосіб 2:

$$m_y = - \int_{-\infty}^0 x W_1(x) dx + \int_0^{\infty} x W_1(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x W_1(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x,$$

Таким чином, математичне чекання процесу на виході квадратичного детектора дорівнює дисперсії вхідного процесу, а на виході лінійного детектора – пропорційне середноквадратичному відхиленню вхідного процесу.

Структурні схеми вимірювальних пристроїв (алгоритми обчислень)

Оскільки математичне чекання процесу на виході квадратичного детектора дорівнює дисперсії σ_x^2 , а на виході лінійного детектора – пропорційне σ_x з коефіцієнтом пропорційності $\sqrt{2/\pi}$, відповідні структурні схеми пристроїв для вимірювання ефективного значення нормального центрованого СВП $X(t)$ показано на рис.3.2.

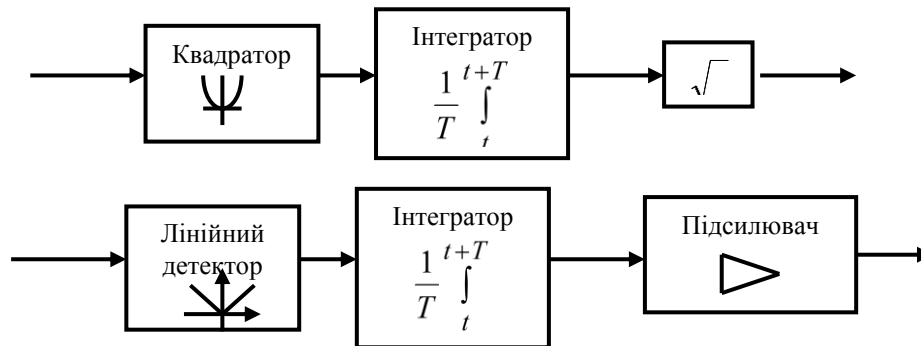


Рис. 3.2

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

При розв'язанні задачі потрібно було обчислювати визначені інтеграли. Вище ми скористалися таблицями інтегралів Г.Б. Двайта. Однак ці ж інтеграли можна обчислювати й в середовищі спеціальних математичних програм, таких, наприклад, як Matlab чи Mathcad. В програмі Matlab це робиться так. Припустимо, треба обчислити вираз:

$$I_1 = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma_x} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) dx.$$

В робочому вікні задаємо:

```
>> syms x
>> syms sig real
>> f=sqrt(2/pi)/sig*x*exp(-0.5*(x/sig)^2);
>> int(f,x,0,inf)
```

і одержуємо відповідь:

```
ans =
7186705221432913/9007199254740992*sig
```

Неважко перевірити, що

$$7186705221432913/9007199254740992 = \sqrt{2/\pi}.$$

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

Як бачимо, результати розрахунків інтегралу, проведені за допомогою таблиць та комп'ютерної програми, цілком співпадають. Таким чином, використання програми Matlab дозволяє значно спростувати процес проведення аналітичних викладок.

Особливість використання ПЕОМ в даному випадку полягає в тому, що ми не просто обчислювали визначений інтеграл, а спрощували математичний вираз, що містив символічний параметр **sig**. Щоб програма правильно відреагувала на цю обставину, було віддано спеціальну команду:

```
>> syms sig real
```

Задача 4

Відповідь:

$$W_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{ay}} \{W_1(\sqrt{y/a}) + W_1(-\sqrt{y/a})\}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_x \sqrt{2\pi ay}} \left[e^{-\frac{(\sqrt{y/a}-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{y/a}+m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \right], & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Задача 5

Теоретичні відомості тотожні таким для задачі 3. Особливістю даної задачі є використання нелінійного елементу – двостороннього обмежувача – із характеристикою, показаною на рисунку 5.1.

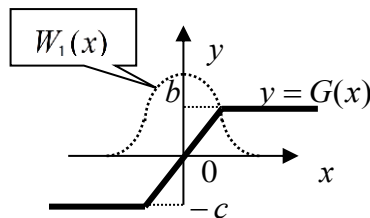


Рис. 5.1

З рисунку бачимо, що маємо особливий випадок перетворення для функції $y = G(x)$, а саме: навколо $x=0$ маємо лінійну залежність $y = x$. Починаючи із значення $x = b$ значення $y = b$ є сталим. Так само, йдучи в сторону від'ємних значень, починаючи із значення $x = -c$ значення $y = -c$ також є сталим. Це значить, що в особливих точках $x = b$ та $x = -c$ розподіл $W_2(y)$ має особливості у вигляді δ -функцій.

Аналітичні розрахунки

З умови задачі маємо:

$$y = G(x) = \begin{cases} 1, & x > 1; \\ x, & -1 \leq x \leq 1; \\ -1, & x < -1 \end{cases}$$

$$W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Рішення задачі:

1) для $-1 < x < 1$:

$$g(y) = y; \quad g'(y) = 1;$$

$$W_2(y) = W_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}};$$

2) для $x = -1$ маємо δ -функцію з ваговим коефіцієнтом, який дорівнює площі ділянки $W_1(x)$ в межах $-\infty < x \leq -1$:

$$W_2(y) = \delta(y+1) \cdot s_1,$$

$$s_1 = \int_{-\infty}^{-1} W_1(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.1587,$$

де значення інтегралу знаходимо в таблиці розподілу нормальної функції

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

3) аналогічно для $x = 1$:

$$W_2(y) = \delta(y-1) \cdot s_2,$$

$$s_2 = \int_1^{\infty} W_1(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.1587$$

4) кінцевий результат:

$$W_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} + 0.1587[\delta(y+1) + \delta(y-1)], & -1 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{ін.} y \end{cases}$$

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

Цікаво побудувати графік розподілу $W_2(y)$. Оскільки розподіл $W_2(y)$ на інтервалі $-1 < x < 1$ співпадає з нормальним розподілом, можемо скористуватися таблицею значень нормального розподілу. Інший шлях – скористуватися калькулятором, що призначений для проведення інженерних розрахунків. Третій спосіб - використати для такої побудови ПЕОМ та комп'ютерну програму Matlab.

Ще одна корисна справа – проведення на ПЕОМ чисельного експерименту, а саме:

- 1) згенерувати нормально розподілений процес із заданими параметрами;
- 2) змодельовати його проходження через двосторонній обмежувач;
- 3) побудувати гістограму процесу на виході двостороннього обмежувача;
- 4) порівняти одержану гістограму із теоретичним розподілом.

Побудуємо **теоретичний графік розподілу** $W_2(y)$, скориставшись програмою Matlab.

Команди для програми Matlab (набираються у командному вікні):

```
>> syms y
>> w=1/(sqrt(2*pi))*(exp(-y^2/2));
>> ezplot(w,[-1,1])
```

Графік теоретичного розподілу в інтервалі значень

$-1 < y < 1$ показано на рис. 5.2. В точках $y = \pm 1$ мають місце δ -функції з ваговими коефіцієнтами $s_1 = s_2 = 0.1587$ (на рис. 5.2 δ -функції не показано).

Для проведення **чисельного експерименту**, що завершується побудовою гістограми, в середовищі програми Matlab доведеться створити m-файл такого виду:

```
N=10000;
x=randn(1,N);
i=1:N;
for i=1:N
    if x(i)>1
        y(i)=1;
```

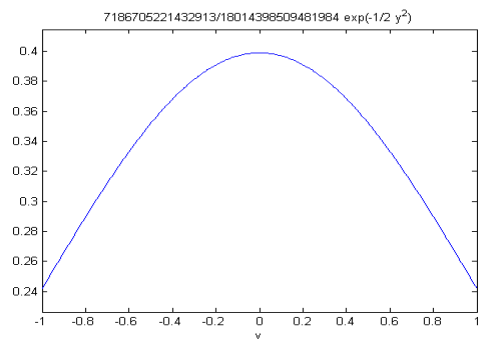


Рис. 5.2

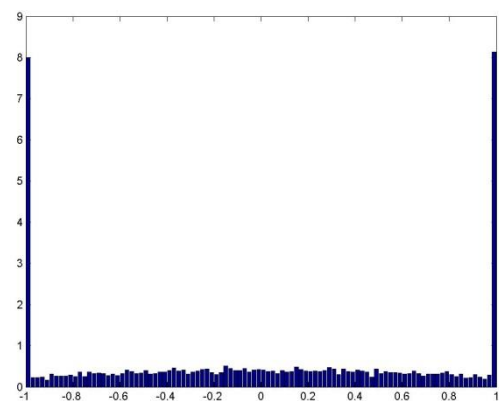


Рис. 5.3

```

elseif x(i)<-1
    y(i)=-1;
else
    y(i)=x(i);
end
end
M=100;
dy=2/M;
[n,xout]=hist(y,M);
n=n/N/dy;
bar(xout,n)

```

Одержану гістограму показано на рис. 5.3.

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

Як бачимо, результати розрахунків теоретичного розподілу та результати модельного експерименту досить добре співпадають в зоні $-1 < y < 1$. В точках $y = \pm 1$ маємо значення 8. Якщо помножити це значення на крок побудови гістограми $\Delta y = 0.02$, одержимо число 0.16, що трохи менше за теоретичне значення ваги δ -функцій з ваговими коефіцієнтами $s_1 = s_2 = 0.1857$.

Таким чином, ми експериментально перевірили справедливості теоретичних результатів.

Особливість проведеного чисельного експерименту – довелося писати програму у вигляді m-файлу. Причина – необхідність виконання операцій умовного переходу **if**, а також необхідність організації циклу **for**.

Спектрально-кореляційний аналіз процесів та лінійних систем

Задача 6

Основні теоретичні відомості

Передаточна функція інтегруючого RC-ланцюжка має вигляд:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}.$$

Квадрат модуля передаточної характеристики:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2}$$

На частоті $f = 0$ маємо:

$$|H(0)|^2 = 1.$$

Неважко бачити, що $|H(f)|^2$ монотонно спадає із зростом f , причому:

$$|H(f)|^2 \approx \frac{1}{4\pi^2 f^2 (RC)^2} \rightarrow 0 \text{ при } f \rightarrow \infty.$$

Приблизний (якісний) графік $|H(f)|^2$ показано на рис. 6.1.

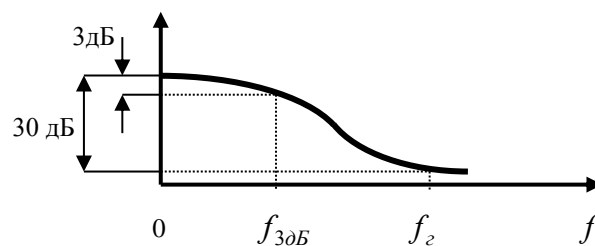


Рис. 6.1

Ступінь згасання квадрата модуля передаточної характеристики вимірюють у децибелах (дБ):

$$\Delta = 10 \lg \left(\frac{|H(f)|^2}{|H(0)|^2} \right) = 10 \lg |H(f)|^2 = -10 \lg (1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2).$$

Оскільки для інтегруючого RC-ланцюжка $|H(f)|^2 < 1$ при $f > 0$, **ступінь згасання – величина від’ємна**.

Якщо відома ступінь згасання Δ для заданої частоти f (з умов задачі), тоді можна визначити добуток RC :

$$1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2 = 10^{-0,1\Delta},$$

$$RC = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{10^{-0,1\Delta} - 1}. \quad (1)$$

Якщо відомими є добуток RC та ступінь згасання Δ , тоді можна визначити відповідну частоту f :

$$f = \frac{1}{2\pi RC} \sqrt{10^{-0,1\Delta} - 1}. \quad (2)$$

Частотні властивості RC-ланцюжка

Для $f \rightarrow \infty$ можемо записати:

$$\Delta \approx -10 \lg (4\pi^2 f^2 (RC)^2).$$

Тоді для f_1 :

$$\Delta_1 \approx -10 \lg (4\pi^2 f_1^2 (RC)^2),$$

а для $f_2 = 2f_1$:

$$\Delta_2 \approx -10 \lg (4\pi^2 4f_1^2 (RC)^2) = -10 \lg (4\pi^2 f_1^2 (RC)^2) - 10 \lg 4 = \Delta_1 - 6 \text{ дБ}.$$

Тому говорять, що для достатньо великої частоти згасання рівня сигналу на виході RC-ланцюжка відбувається із швидкістю 6дБ на октаву.

Аналітичні розрахунки

Щоб знайти добуток RC -ланцюжка, що має смугу пропускання 5 кГц з нерівномірністю 3 дБ, скористаємося формулою (1):

$$RC = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{10^{-0,1\Delta} - 1} = \frac{\sqrt{10^{0,3} - 1}}{2\pi 5000} = 3.18 \cdot 10^{-5}.$$

Зазначимо, що *при розрахунках величину Δ треба брати від’ємною*.

Щоб знайти граничну частоту f_2 , де потужність вихідного сигналу знижується на 30 дБ, порівняно з такою на частоті $f = 0$, скористаємося формулою (2):

$$f_2 = \frac{1}{2\pi 3.18 \cdot 10^{-5}} \sqrt{10^3 - 1} = 158.2 \cdot 10^3 \text{ Гц} = 158.2 \text{ кГц}.$$

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

Побудуємо точний графік передаточної характеристики розрахованого нами RC-ланцюжка.

Для побудови графіку $|H(f)|^2$ в командному вікні програми Matlab треба набрати команди:

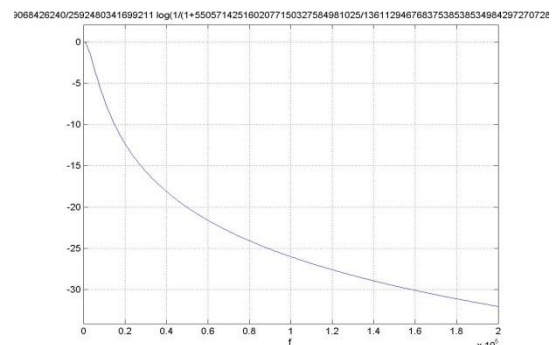


Рис. 6.2

```
syms f
RC=3.18*10^(-5);
H=1/(1+(2*pi*f*RC)^2);
H=10*log10(H);
ezplot(H,[0,200000])
grid on
```

Точний графік (рис. 6.2) побудовано в діапазоні частот 0-200кГц.

З графіку видно, що згасання на 30 дБ відбувається біля частоти 160кГц. На частоті 20 кГц, тобто на межі частот, що сприймаються людським вухом, згасання складає лише 12,5дБ.

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

Як бачимо, результати теоретичного аналізу та обчислень на ПЕОМ досить добре співпадають. Дійсно, в нашому випадку на частоті 100кГц згасання має значення близько -26,5дБ, а на частоті 200кГц – близько -32,5. Різниця згасань складає 6дБ, а частоти відрізняються в 2 рази (на октаву).

Очевидно, якщо на осі частот відкласти логарифм чисельного значення частоти, тоді для великих значень частоти матимемо практично пряму лінію (рис. 6.3, $\log f = 4-10$). Команди для побудови графіку рис. 6.3:

```
f=log10(f);
ezplot(H,[0.1,10])
grid on
```

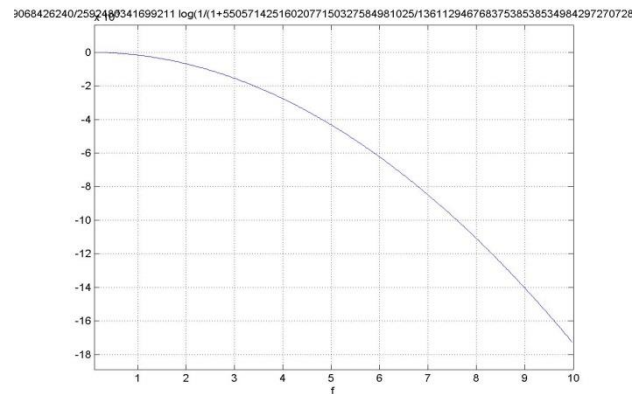


Рис. 6.3

Задача 7

Відповідь: $RC = 2.045 \cdot 10^{-5}$; $f_c = 43.048 \cdot 10^3 \text{ Гц} \approx 43 \text{ кГц}$.

Задача 8

Основні теоретичні відомості

Одне із визначень інтервалу кореляції СВП:

$$\tau_k = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau, \quad (8.1)$$

де $R(\tau)$ - коефіцієнт кореляції СВП. Інтервал кореляції (8.1) іноді називають ефективним, маючи на увазі те, що на цьому інтервалі $R(\tau)$ приймає найбільш вагомі значення, а також те, що при його обчисленні враховуються всі значення коефіцієнту кореляції, що знаходяться в інтервалі $\tau = [0, \infty]$. Є й інші визначення інтервалу кореляції. Наприклад, для вузькосмугових СВП $R(\tau)$ дуже сильно осцилює – в цьому випадку замість $R(\tau)$ під знаком інтегралу використовують $R^2(\tau)$ або $|R(\tau)|$. Але в умові задачі говориться, що на вхід НЧ фільтру подається білий шум із спектральною густиною потужності одностороннього спектру N_0 , а сам фільтр – це RC-ланцюжок. Тому, на виході НЧ фільтру будемо мати низькочастотний

випадковий процес із неосцилюючим коефіцієнтом кореляції. Це дозволяє нам при вирішенні завдання скористатися найпростішим визначенням (8.1).

Оскільки фільтр – це лінійна система, спектри потужності на вході та виході фільтру (рис. 8.1) пов'язані співвідношенням:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f).$$

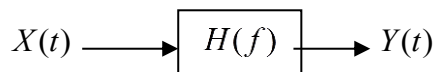


Рис. 8.1

При подачі на вхід білого шуму із спектральною густиною $S_X(f) = N_0/2$ на виході маємо спектр потужності:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 N_0/2.$$

Кореляційна функція процесу на виході лінійної системи, на вхід якої подається білий шум, може бути знайдена за допомогою оберненого перетворення Вінера-Хінчина:

$$K_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) \exp(j2\pi f\tau) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \exp(j2\pi f\tau) df$$

Оскільки передаточна функція інтегруючого RC-ланцюжка має вигляд:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC},$$

а квадрат модуля передаточної характеристики має вигляд:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2},$$

для розв'язання нашого завдання треба:

1) знайти функцію кореляції на виході НЧ фільтру:

$$K_Y(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2} \exp(j2\pi f\tau) df \quad (8.2)$$

2) знайти ефективний інтервал кореляції СВП на виході НЧ фільтру, користуючись формулою (8.1) та пам'ятаючи, що

$$R(\tau) = K(\tau)/\sigma^2.$$

Одержане рішення буде залежати від добутку RC й тому матиме загальний характер. Для конкретизації рішення треба буде із умов задачі розрахувати значення добутку RC . В задачі 6 було показано, що

$$RC = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{10^{-0,1\Delta} - 1}. \quad (8.3)$$

Аналітичні розрахунки

1) користуючись таблицями перетворень Фур'є, знайдемо функцію кореляції на виході НЧ фільтру:

$$K_Y(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2} \exp(j2\pi f\tau) df. \quad (8.4)$$

В довідниках знаходимо, що функції кореляції

$$K(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \quad (8.5)$$

відповідає спектральна густина потужності

$$S(f) = \frac{2A\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2A/\alpha}{1 + \left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)^2}. \quad (8.6)$$

Порівнюючи між собою (8.4) та (8.6), маємо:

$$\alpha = 1/RC, \quad 2ARC = \frac{N_0}{2},$$

звідки

$$A = \frac{N_0}{4RC}.$$

Нам потрібен лише коефіцієнт кореляції, тому відкидаючи A в (8.5), одержуємо:

$$R(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{RC}}. \quad (8.7)$$

Підставляючи (8.7) в (8.1), маємо

$$\tau_k = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau = RC. \quad (8.8)$$

Щоб знайти добуток RC -ланцюжка, що має смугу пропускання 5 кГц з нерівномірністю 3 дБ, скористаємося формулою (8.3):

$$RC = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{10^{0,1\Delta} - 1} = \frac{\sqrt{10^{0,3} - 1}}{2\pi 5000} = 3.18 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

Зазначимо, що *при розрахунках величину Δ треба брати від'ємною*.

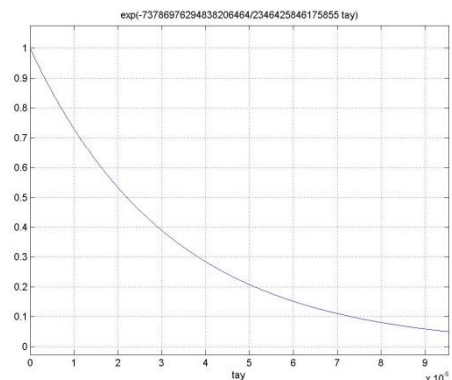
Таким чином, інтервал кореляції процесу на виході RC -ланцюжка $\tau_k = 3.18 \cdot 10^{-5} \text{ с}$.

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

За допомогою ПЕОМ побудуємо графік коефіцієнту кореляції (7) процесу на виході RC -ланцюжка, на вході якого – білий шум;

Для побудови графіку $R(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{RC}} = e^{-\frac{|\tau|}{\tau_k}}$ в командному вікні програми Matlab треба набрати команди:

```
syms tau  
tk=3.18*10^(-5);  
R=exp(-tau/tk);  
ezplot(R,[0,3*tk])  
grid on
```



Графік (рис. 8.1) побудовано в діапазоні $0 - 3\tau_k$.

Рис. 8.1

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

Як бачимо, обчислення на ПЕОМ дозволяють суттєво спростити процес побудови графіків аналітичних виразів. Із побудованого графіку коефіцієнту кореляції видно, що на виході на виході RC -ланцюжка, на вході якого – білий шум, коефіцієнт кореляції має вигляд монотонно спадаючої (за експоненціальним законом) функції.

Оскільки коефіцієнт автокореляції – функція парна, можна обмежитися побудовою графіку для $\tau > 0$.

Крім того, оскільки спадання значень коефіцієнту кореляції досить швидко із зростом τ , при побудові графіку можна обмежитися діапазоном τ від 0 до $3\tau_k$.

Задача 9

Відповідь: $\tau_k = 2RC = 4.09 \cdot 10^{-5} \text{ c}$.

Задача 10

Основні теоретичні відомості

Припустимо, що на вхід НЧ фільтру (рис. 10.1)

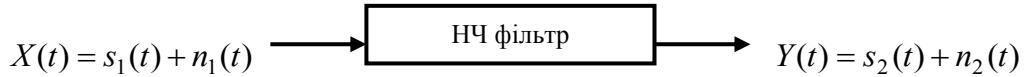


Рис. 10.1

подається суміш гармонічного сигналу с шумом:

$$X(t) = s_1(t) + n_1(t),$$

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$

де A_1 і ω_0 - детерміновані амплітуда і частота, φ_1 - випадкова початкова фаза, рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 2\pi]$; $n_1(t)$ - обмежений за частотою білий шум с одностороннім спектром потужності:

$$G(f) = \begin{cases} N_0, & 0 \leq f \leq f_c; \\ 0, & \text{дп. } f \end{cases}$$

Відношення сигнал-шум на вході НЧ фільтру природно визначити як відношення ефективних напруг сигналу і шуму:

$$(c/u)_{\text{вх}} = \frac{A_1 / \sqrt{2}}{\sqrt{f_c N_0}}.$$

Відношення сигнал-шум на виході НЧ фільтру:

$$(c/u)_{\text{вих}} = \frac{A_2 / \sqrt{2}}{\sigma_{u2}},$$

де A_2 - амплітуда гармонічного сигналу на виході фільтру:

$$s_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2),$$

σ_{u2} - стандартне відхилення шуму на виході фільтру.

Виграш у відношенні сигнал-шум має місце за рахунок більш інтенсивного, порівняно з сигналом, придушення шуму. Кількісно такий виграш можна визначити як відношення відношень сигнал-шум на виході и вході НЧ фільтру:

$$\Delta = \frac{(c/u)_{\text{вих}}}{(c/u)_{\text{вх}}} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\sqrt{f_c N_0}}{\sigma_{u2}} = \frac{A_2 / A_1}{\sigma_{u2} / \sqrt{f_c N_0}}. \quad (10.1)$$

Якщо позначити придушення сигналу та шуму відповідно:

$$\Pi_c = A_2 / A_1, \quad \Pi_u = \sigma_{u2} / \sqrt{f_c N_0},$$

тоді виграш у відношенні сигнал-шум можна записати й так:

$$\Delta = \Pi_c / \Pi_u. \quad (10.2)$$

Ступінь придушення сигналу при НЧ фільтрації:

$$\Pi_c = A_2 / A_1 = |H(f_0)|, \quad (10.3)$$

де $H(f)$ - передаточна характеристика НЧ фільтру.

Спектральна густина потужності шуму на виході НЧ фільтру:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = |H(f)|^2 \frac{N_0}{2} \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right).$$

Дисперсія шуму на виході НЧ фільтру:

$$\sigma_{u2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) df = N_0 \int_0^{f_z} |H(f)|^2 df.$$

Стандартне відхилення шуму на виході НЧ фільтру:

$$\sigma_{u2} = \sqrt{N_0 \int_0^{f_z} |H(f)|^2 df}.$$

Таким чином, ступінь придушення шуму при НЧ фільтрації:

$$\Pi_u = \sigma_{u2} / \sqrt{f_z N_0} = \sqrt{\frac{\int_0^{f_z} |H(f)|^2 df}{f_z}}. \quad (10.4)$$

Таким чином, розв'язок задачі полягає в проведенні розрахунків згідно із формулами (10.2)-(10.4).

Аналітичні та чисельні розрахунки

1) ступінь придушення сигналу при НЧ фільтрації:

$$\Pi_c = A_2 / A_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f_0^2 (RC)^2}} = 0.9806,$$

де:

$$RC = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{10^{-0,1\Delta} - 1} = \frac{\sqrt{10^{0,3} - 1}}{2\pi 5000} = 3.18 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

2) ступінь придушення шуму при НЧ фільтрації:

$$\Pi_u = \sqrt{\frac{\int_0^{f_z} |H(f)|^2 df}{f_z}};$$

$$\int_0^{f_z} |H(f)|^2 df = \int_0^{f_z} \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2} df = \frac{1}{2\pi RC} \int_0^{2\pi f_z RC} \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\arctg(2\pi f_z RC)}{2\pi RC} = 6634.4;$$

$$\Pi_u = \sqrt{\frac{6634.4}{20000}} = 0.576$$

4) виграш у відношенні сигнал-шум:

$$\Pi_c / \Pi_u = 0.9806 / 0.576 = 1.7024,$$

або в децибелах:

$$20 \lg \Pi_c / \Pi_u = 4.6 \text{ дБ}.$$

Задача 11

Відповідь: 4,9 дБ

Задача 12

Основні теоретичні відомості

Якщо на вхід лінійної системи (рис. 12.1) подається стаціонарний випадковий процес $X(t)$,

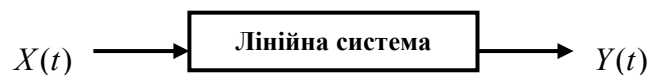


Рис. 12.1

тоді відгук $Y(t)$ системи описується згорткою:

$$Y(t) = X(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)h(t - \xi)d\xi,$$

де $h(t)$ - імпульсна перехідна характеристика (ПІХ) системи.

Кореляційна функція відгуку також описується згорткою:

$$K_Y(\tau) = K_X(\tau) \otimes B_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\eta)B_h(\tau - \eta)d\eta, \quad (12.1)$$

де

$$B_h(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)h(\theta - \gamma)d\theta \quad (12.2)$$

автокореляційний інтеграл ПІХ лінійної системи.

На *спектральній мові* зв'язок між входом і виходом лінійної системи виглядає простіше:

$$S_Y(f) = S_h(f)S_X(f), \quad (12.3)$$

де $S_Y(f)$ и $S_X(f)$ - спектральні густини потужності СВП $Y(t)$ и $X(t)$:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)d\tau,$$

$S_h(f)$ - перетворення Фур'є автокореляційного інтегралу ПІХ лінійної системи.

$$S_h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} B_h(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)d\tau$$

Оскільки

$$S_h(f) = H(f)H^*(f) = |H(f)|^2,$$

де $H(f)$ - частотна характеристика лінійної системи:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(j2\pi ft)dt,$$

із (3) маємо:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f). \quad (12.4)$$

Таким чином, для розв'язання нашого завдання маємо:

- 1) знайти аналітичний вираз для $H(f)$;
- 2) за допомогою формули (12.4) знайти спектр потужності відгуку;

Структурна схема лінійної системи

Структурна схема лінійної системи показана на рис.12.2.

Вона складається з двох послідовно поєднаних лінійних систем. Тому:

$$H(f) = H_1(f)H_2(f),$$

$$|H(f)|^2 = |H_1(f)|^2 |H_2(f)|^2.$$

Для першого фільтру з гаусівською АЧХ на резонансній частоті f_{01} :

$$|H_1(f)| = e^{-\frac{(f-f_{01})^2}{2\beta^2}}, \quad f \geq 0,$$

де параметр β пропорційний ефективній полосі пропускання фільтру.

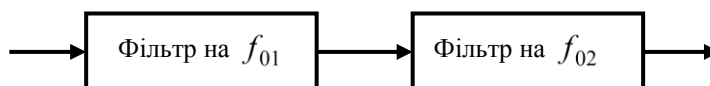


Рис. 12.2

Аналогічний вигляд має АЧХ другого фільтру, тому загальна АЧХ:

$$|H(f)|^2 = |H_1(f)|^2 |H_2(f)|^2 = e^{-\frac{(f-f_{01})^2}{\beta^2}} e^{-\frac{(f-f_{02})^2}{\beta^2}} = e^{-\frac{2f^2 - 2f(f_{01}+f_{02}) + f_{01}^2 + f_{02}^2}{\beta^2}}, \quad f \geq 0,$$

Зауважимо, що ми для простоти розглянули лише ділянку позитивних частот – для від’ємних частот маємо аналогічну функцію, дзеркальну відносно $f = 0$.

Аналітичні розрахунки

1) Трансформуємо показник ступеню експоненти у виразі для $|H(f)|^2$:

$$2f^2 - 2f(f_{01} + f_{02}) + f_{01}^2 + f_{02}^2 = 2\left(f - \frac{f_{01}+f_{02}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(f_{01}^2 - 2f_{01}f_{02} + f_{02}^2)$$

Таким чином,

$$|H(f)|^2 = e^{-\frac{2\left(f - \frac{f_{01}+f_{02}}{2}\right)^2}{\beta^2}} e^{-\frac{(f_{02}-f_{01})^2}{2\beta^2}}, \quad f \geq 0 \quad (12.5)$$

Для від’ємних частот маємо аналогічну функцію, дзеркальну відносно $f = 0$.

Таким чином, АЧХ загального фільтру має максимум посередині між частотами f_{01} та f_{02} .

2) Із (4) з урахуванням (5) знаходимо спектр потужності відгуку:

$$S_Y(f) = \frac{N_0}{2} e^{-\frac{2\left(f - \frac{f_{01}+f_{02}}{2}\right)^2}{\beta^2}} e^{-\frac{(f_{02}-f_{01})^2}{2\beta^2}}, \quad f \geq 0.$$

Для від’ємних частот маємо аналогічну функцію, дзеркальну відносно $f = 0$.

Таким чином, спектр відгуку має максимум посередині між частотами f_{01} та f_{02} .

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

Перевіримо правильність виводу відносно положення максимуму АЧХ загального фільтру, створеного послідовним поєднанням двох фільтрів з гаусівською АЧХ, однаковими полосами пропускання, але такими, що мають різні резонансні частоти. Для цього припустимо $\beta = 100$, $f_{01} = 3\text{кГц}$, $f_{02} = 4\text{кГц}$. Якщо наші розрахунки вірні, матимемо загальний максимум на частоті 3,5 кГц. В командному вікні програми Matlab набираємо команди:

```
syms f
b=100; f01=3000; f02=4000;
H1=exp(-(f-f01)^2/(b^2));
H2=exp(-(f-f02)^2/(b^2));
H=H1*H2
H=10*log10(H);
ezplot(H,[0,7000])
grid on
```

Графік (рис. 12.3) побудовано в діапазоні частот 0-7кГц.

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

Як бачимо, результати теоретичного аналізу та обчислень на ПЕОМ добре співпадають. З графіку на рис.3 видно, що максимум спектру дійсно знаходиться на частоті 3,5 кГц. Таким чином, маємо підтвердження, що аналітичні розрахунки були проведені вірно.

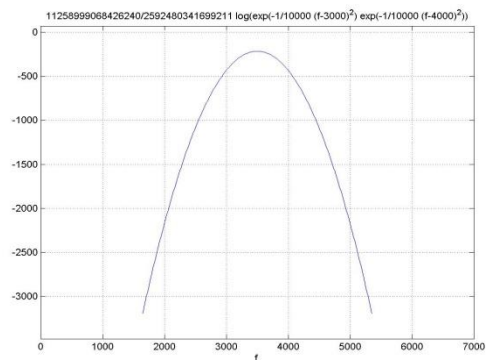


Рис. 12.3

Оцінювання параметрів стаціонарних випадкових процесів

Задача 13

Основні теоретичні відомості

Нехай для параметру a експериментальним шляхом одержана його незміщена оцінка \tilde{a} . Довірчим інтервалом цієї оцінки \tilde{a} називають інтервал (рис. 13.1)

$$I_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon; \tilde{a} + \varepsilon), \quad (13.1)$$

такий, що ймовірність знаходження істинного значення параметру a в цьому інтервалі дорівнює заздалегідь заданій величині β (наприклад, $\beta=0.9, 0.95, 0.99$ тощо):

$$P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta, \quad (13.2)$$

котру називають «довірчою ймовірністю».

Зазначимо, що границі інтервалу (1) симетричні відносно точки \tilde{a} . Це логічно в тих випадках, якщо заздалегідь відомо, що закон розподілу оцінки \tilde{a} - парна функція (відносно математичного чекання \tilde{a}). Якщо це не так, границі інтервалу (1) логічно робити несиметричними відносно точки \tilde{a} .

Оскільки в нашій задачі мова йде про оцінку математичного чекання із $N=100$ некорельованих відліків

$$\tilde{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad (13.3)$$

згідно з центральною граничною теоремою випадкову величину \tilde{m} можна вважати розподіленою за нормальним законом, що є парною функцією відносно математичного чекання. Тому наше припущення про симетричність границь інтервалу (13.1) цілком виправдане.

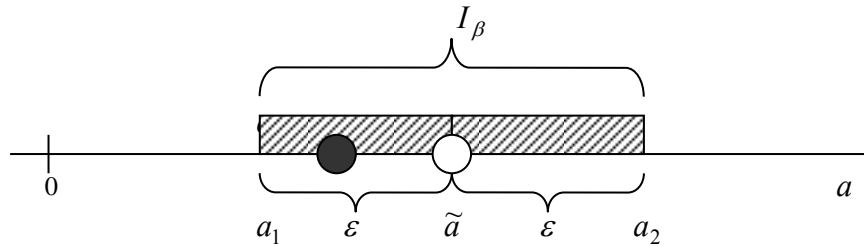


Рис. 13.1

Зазначимо ще одну обставину. Якби нам був відомий закон розподілу величини \tilde{a} , тоді задача знаходження довірчого інтервалу була б дуже простою: досить було б знайти таке значення ε , для якого виконується співвідношення (13.2). Ускладнення міститься в тому, що закон розподілу оцінки \tilde{a} залежить від закону розподілу СВ X і, отже, від самого параметра a , що оцінюється.

Обминути це ускладнення можна, застосовуючи наближений прийом, а саме: замінюючи у виразі для ε невідомі параметри закону розподілу СВ X їхніми крапковими оцінками. Очевидно, ступінь грубості такого прийому залежить від числа дослідів N : при великому N (на практиці - починаючи з $20 \div 30$) одержуємо задовільні за точністю результати.

Із врахуванням зазначених вище припущень кінцеві вирази для границь довірчого інтервалу оцінки (13.3):

$$I_\beta = (\tilde{m} - t_\beta \sigma_{\tilde{m}}; \tilde{m} + t_\beta \sigma_{\tilde{m}}), \quad (13.4a)$$

$$I_\beta = (\tilde{m} - t_\beta \tilde{\sigma}_{\tilde{m}}; \tilde{m} + t_\beta \tilde{\sigma}_{\tilde{m}}). \quad (13.4b)$$

Формула (13.4a) відповідає ситуації а), коли апіорі відомо, що $X(i\Delta t), i=1,2,\dots$ може бути нормальним процесом із відомими параметрами розподілу $[0;1]$. Формула (13.4b) відповідає ситуації б), коли апіорі нічого не відомо про закон розподілу СВП $X(i\Delta t), i=1,2,\dots$

В цих формулах $\sigma_{\tilde{m}}$ - стандартне відхилення оцінки (3); $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}}$ - оцінка цього стандартного відхилення; t_β - числовий параметр, що залежить від заданої довірчої ймовірності β та визначається за допомогою табульованого інтегралу ймовірностей $\Phi^*(x)$:

$$t_\beta = \arg \Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right), \quad (13.5)$$

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (13.6)$$

Стандартне відхилення $\sigma_{\tilde{m}}$ для ситуації а) визначається за формулою:

$$\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{D_{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{D_X}{N}} \quad (13.7a)$$

а оцінка стандартного відхилення $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}}$ для ситуації б) визначається за формулами:

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{m}} = \sqrt{\tilde{D}_{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{\tilde{D}_X}{N}}, \quad (13.7b)$$

$$\tilde{D}_X = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \tilde{m})^2$$

Схема розв'язання задачі

Для розв'язання задачі потрібно:

- 1) за допомогою виразу (13.5) та таблиць значень інтегралу ймовірностей (13.6) знайти числовий параметр t_β ;
- 2) у ситуації а) - за допомогою виразу (13.7a) розрахувати $\sigma_{\tilde{m}}$; у ситуації б) - за допомогою виразу (13.7b) розрахувати $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}}$.

Таким чином, структурна схема алгоритму розв'язання завдання в ситуації а) має вигляд, як показано на рис. 13.2a, а в ситуації б) – на рис. 13.2б.

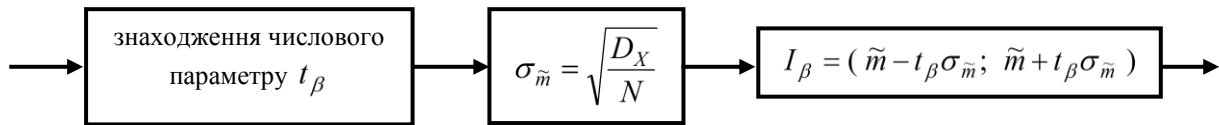


Рис. 13.2a

Аналітичні розрахунки

Аналітичні розрахунки можливі лише для ситуації а):

- 1) за допомогою виразу (13.5) та таблиць значень інтегралу ймовірностей (6) знаходимо числовий параметр t_β :

$$t_\beta = 1.96 \approx 2;$$

- 2) стандартне відхилення оцінки (13.3):

$$\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{D_X}{N}} = 0.1;$$

- 3) границі довірчого інтервалу:

$$I_\beta = (\tilde{m} - t_\beta \sigma_{\tilde{m}}; \tilde{m} + t_\beta \sigma_{\tilde{m}}) = (\tilde{m} - 0.2; \tilde{m} + 0.2).$$

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

Використання ПЕОМ доцільне в ситуації б), коли після визначення параметру t_β потрібно експериментально оцінити МЧ та дисперсію дискретного СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Процедуру такого оцінювання можна також змоделювати на ПЕОМ, наприклад, в середовищі програми Excel.

Етапи такого моделювання:

- 1) моделювання 100 значень дискретного нормального СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ з параметрами розподілу $[0;1]$ (меню програми Excel: Сервіс/Аналіз даних/Генерування випадкових чисел);

- 2) оцінювання МЧ, дисперсії та стандартного відхилення дискретного СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ (меню програми Excel: Вставка/Функція/СРЗНАЧ, ДИСП, КОРЕНЬ);
- 3) визначення оцінки стандартного відхилення оцінки МЧ за формулою (13.7б);
- 4) визначення границь довірчого інтервалу: $I_\beta = (\tilde{m} - t_\beta \tilde{\sigma}_{\tilde{m}}; \tilde{m} + t_\beta \tilde{\sigma}_{\tilde{m}})$.

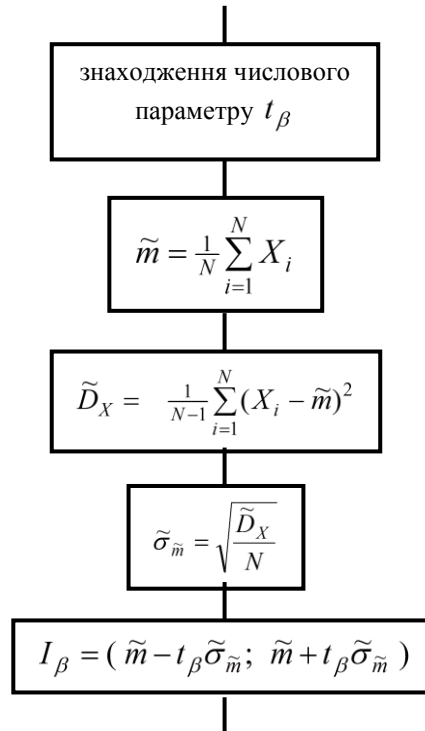


Рис. 13.2б

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

В результаті проведеного моделювання одержано такі результати:

$$\begin{aligned}
 \tilde{m} &= -0,029703; & \tilde{D}_X &= 0,735167; \\
 \tilde{D}_{\tilde{m}} &= 0,0073517; & \tilde{\sigma}_{\tilde{m}} &= 0,0857419; \\
 I_\beta &= (-0,20118; 0,14178).
 \end{aligned}$$

Співставлення цих результатів з результатами аналітичних розрахунків свідчить про досить непогане якісне співпадання: істинне значення МЧ дійсно знаходиться в межах знайденого довірчого інтервалу. Кількісне, і досить значне, розходження результатів ($\tilde{D}_X = 0,735167$, тоді як $D_X = 1$) пояснюється малим об'ємом експериментальних даних (всього 100 значень). Збільшуючи цей об'єм, можна одержати краще співпадання – тим краще, чим більший об'єм експериментальних даних.

Задача 14

Допоміжний коментар

В даному завданні мова йде про оцінку математичного чекання СВП $Y(j\Delta t)$, $j = 1, 2, \dots$ одержаного шляхом ковзного усереднення за 4 значеннями нормального дискретного білого шуму $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, що складається із $N = 100$. Якщо не враховувати 3 значення $Y(j\Delta t)$, для формування яких було використано менше 4-х відліків $X(i\Delta t)$, тоді СВП $Y(j\Delta t)$, $j = 1, 2, \dots, N_1$ складається із $N_1 = 97$ корельованих значень.

Тому оцінка математичного чекання СВП $Y(j\Delta t)$ має вигляд:

$$\tilde{m} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} Y_j, \quad (14.1)$$

Оскільки число $N_1 = 97$ досить велике, випадкову величину \tilde{m} можна вважати розподіленою за нормальним законом.

В ситуації а) параметри закону розподілу величини \tilde{m} досить легко обчислити. Дійсно, оскільки

$$Y_j = \frac{1}{N_{ycp}} \sum_{i=1}^{N_{ycp}} X_{j-i+1}, \quad j = 1, \dots, N_1,$$

математичне чекання СВП $Y(j\Delta t)$ має вигляд:

$$\langle Y_j \rangle = \langle X_i \rangle = 0.$$

Кореляційна функція СВП $Y(j\Delta t)$:

$$K_Y[r_0] = \begin{cases} \frac{D_X}{N_{ycp}} \left(1 - \frac{|r_0|}{N_{ycp}}\right), & |r_0| < N_{ycp}, \\ 0, & \text{дп. } r_0 \end{cases}$$

Звідси дисперсія СВП $Y(j\Delta t)$:

$$D_Y = K_Y[0] = \frac{D_X}{N_{ycp}}.$$

Довірчий інтервал:

$$I_\beta = (\tilde{m} - t_\beta \sigma_{\tilde{m}}; \tilde{m} + t_\beta \sigma_{\tilde{m}}), \quad (14.2a)$$

де $\sigma_{\tilde{m}}$ визначається формулою:

$$\sigma_{\tilde{m}}^2 = \frac{D_Y}{N_1} \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{N_1-1} \left(1 - \frac{r}{N_1}\right) R_Y[r] \right), \quad (14.3a)$$

де

$$R_Y[r] = \frac{K_Y[r]}{D_Y}.$$

В ситуації б) треба замінити невідомі параметри закону розподілу СВ X їхніми крапковими оцінками. Очевидно, ступінь грубості такого прийому залежить від числа дослідів N : при великому N (на практиці - починаючи з $20 \div 30$) одержуємо задовільні за точністю результати.

Із врахуванням зазначених вище припущень кінцеві вирази для границь довірчого інтервалу оцінки:

$$I_\beta = (\tilde{m} - t_\beta \tilde{\sigma}_{\tilde{m}}; \tilde{m} + t_\beta \tilde{\sigma}_{\tilde{m}}), \quad (14.2б)$$

де $\tilde{\sigma}_{\tilde{m}}$ - оцінка стандартного відхилення $\sigma_{\tilde{m}}$, що для ситуації б) визначається за формулами:

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{m}}^2 = \frac{\tilde{D}_Y}{N_1} \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{N_1-1} \left(1 - \frac{r}{N_1}\right) \tilde{R}_Y[r] \right). \quad (14.3б)$$

Як бачимо, в ситуації б) потрібно оцінювати функцію кореляції СВП $Y(j\Delta t)$.

Аналітичні та чисельні розрахунки

Аналітичні розрахунки можливі лише для ситуації а):

- 1) за допомогою виразу (13.5) та таблиць значень інтегралу ймовірностей (13.6) знаходимо числовий параметр t_β :

$$t_\beta = 1.96 \approx 2;$$

- 2) стандартне відхилення оцінки (14.1):

$$\sigma_{\tilde{m}}^2 \approx \frac{D_Y}{N_1} \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{N_1-1} R_Y[r] \right); \quad D_Y = \frac{D_X}{N_{ycp}} = \frac{1}{4};$$

$$\sum_{r=1}^{N_1-1} R_Y[r] = \sum_{r=1}^{N_{ycp}-1} R_Y[r] = \sum_{r=1}^3 (1 - \frac{r}{4}) = 0.75 + 0.5 + 0.25 = 1.5;$$

$$\sigma_{\tilde{m}}^2 \approx \frac{0.25}{97} (1 + 2 \cdot 1.5) = \frac{1}{97}; \quad \sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{1}{97}} = 0.102 \approx 0.1$$

3) границі довірчого інтервалу:

$$I_{\beta} = (\tilde{m} - t_{\beta} \sigma_{\tilde{m}}; \tilde{m} + t_{\beta} \sigma_{\tilde{m}}) = (\tilde{m} - 0.2; \tilde{m} + 0.2).$$

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

Використання ПЕОМ доцільне в ситуації б), коли після визначення параметру t_{β} потрібно експериментально оцінити МЧ та дисперсію дискретного СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Процедuru такого оцінювання можна також змодельовати на ПЕОМ, наприклад, в середовищі програми Excel.

Етапи такого моделювання:

- 1) моделювання 100 значень дискретного нормального СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ з параметрами розподілу $[0; 1]$ (меню програми Excel: Сервіс/Аналіз даних/Генерування випадкових чисел);
- 2) одержання $Y(j\Delta t)$, $j = 1, \dots, 97$ шляхом ковзного усереднення $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, 100$ з параметром усереднення $N_{ycp} = 4$ (меню програми Excel: Сервіс/Аналіз даних/Ковзаюче середнє);
- 3) оцінювання МЧ та дисперсії дискретного СВП $Y(j\Delta t)$, $j = 1, 2, \dots, 97$ (меню програми Excel: Вставка/Функція/СРЗНАЧ, ДИСП, КОРЕНЬ);
- 4) оцінювання середнього відхилення оцінки (14.1) за формулою (14.3б) – для спрощення замість оцінки коефіцієнту кореляції $\tilde{R}_Y[r]$ беремо істинний коефіцієнт кореляції $R_Y[r]$;
- 5) визначення границь довірчого інтервалу: $I_{\beta} = (\tilde{m} - t_{\beta} \tilde{\sigma}_{\tilde{m}}; \tilde{m} + t_{\beta} \tilde{\sigma}_{\tilde{m}})$.

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

В результаті проведеного моделювання одержано такі результати:

$$\tilde{m} = -0,028873; \quad \tilde{D}_Y = 0,203098;$$

$$\tilde{D}_{\tilde{m}} = 0,009826; \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{m}} = 0,099125;$$

$$I_{\beta} = (-0,227123; 0,16938).$$

Співставлення цих результатів з результатами аналітичних розрахунків свідчить про досить непогане якісне співпадання: істинне значення МЧ, що дорівнює 0, дійсно знаходиться в межах знайденого довірчого інтервалу. Кількісне, і досить значне, розходження проміжних результатів ($\tilde{D}_Y = 0,203098$, хоча $D_Y = 0.25$) пояснюється малим об'ємом експериментальних даних (всього 97 значень). Збільшуючи цей об'єм, можна одержати краще співпадання – тим краще, чим більший об'єм експериментальних даних.

Задача 15

Відповідь: для ситуації а) маємо $I_{\beta} = (\tilde{D}_x - 0.284; \tilde{D}_x + 0.284)$. В ситуації б) після визначення параметру t_{β} потрібно експериментально оцінити МЧ та дисперсію дискретного СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Процедuru такого оцінювання можна також змодельовати на ПЕОМ, наприклад, в середовищі програми Excel (дивись коментарі до задачі 13). В результаті моделювання (в середовищі програми Excel) одержано такі результати:

$$\begin{aligned}\tilde{m} &= -0,029703; & \tilde{D}_X &= 0,735167; \\ \tilde{D}_{\tilde{D}_X} &= 0,010919; & \tilde{\sigma}_{\tilde{D}_X} &= 0,104492; \\ I_\beta &= (0,526183; 0,944151).\end{aligned}$$

Співставлення цих результатів з результатами аналітичних розрахунків свідчить про досить велике розходження оцінки $\tilde{\sigma}_{\tilde{D}_X} = 0,104492$ із значенням $\sigma_{\tilde{D}_X} = 0.142$, що пояснюється малим об'ємом експериментальних даних.

Задача 16

Відповідь: для ситуації а) маємо $I_\beta = (\tilde{D}_y - 0.12; \tilde{D}_y + 0.12)$. Для ситуації б) треба провести моделювання, подібне до виконаного в задачі 14. При цьому одержано $I_\beta = (0,10638; 0,2998)$.

Задача 17

Теоретичні відомості

Оцінка автокореляційної функції (АКФ) має вигляд:

$$\tilde{K}_X^*[r] = \frac{1}{N-r} \sum_{i=1}^{N-r} X[i]X[i+r], \quad (17.1)$$

Кінцеві вирази для границь довірчого інтервалу оцінки (17.1):

$$I_\beta = (K_X^*[r] - t_\beta \sigma_{K_X^*[r]}; K_X^*[r] + t_\beta \sigma_{K_X^*[r]}), \quad (17.2a)$$

$$I_\beta = (\tilde{K}_X^*[r] - t_\beta \tilde{\sigma}_{\tilde{K}_X^*[r]}; \tilde{K}_X^*[r] + t_\beta \tilde{\sigma}_{\tilde{K}_X^*[r]}). \quad (17.2б)$$

Формула (17.2a) відповідає ситуації а), коли апіорі відомі параметри розподілу $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$. Формула (17.2б) відповідає ситуації б), коли апіорі нічого не відомо про параметри закону розподілу СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$

В цих формулах $\sigma_{\tilde{K}_X^*[r]}$ - стандартне відхилення оцінки (17.1); $\tilde{\sigma}_{\tilde{K}_X^*[r]}$ - оцінка цього стандартного відхилення.

Стандартне відхилення $\sigma_{\tilde{K}_X^*[r]}$ для ситуації а) визначається за формулою:

$$\sigma_{\tilde{K}_X^*[r_0]}^2 = \frac{D_X^2}{N-r_0} \left[1 + R_X^2[r_0] + 2 \sum_{r=1}^{N-r_0-1} \left(1 - \frac{r}{N-r_0} \right) (R_X^2[r] + R_X[r+r_0]R_X[r-r_0]) \right].$$

За умовою завдання, $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots$ - білий шум, тобто

$$R_X[r] = \frac{K_X[r]}{D_X} = \begin{cases} 1, & r = 1; \\ 0, & \text{інше } r \end{cases}$$

Враховуючи це, маємо

$$\sigma_{\tilde{K}_X^*[r_0]}^2 = \begin{cases} \frac{2D_X^2}{N}, & r_0 = 0; \\ \frac{D_X^2}{N}, & r_0 = 1 \end{cases} \quad (17.3a)$$

Тоді оцінка стандартного відхилення $\tilde{\sigma}_{\tilde{K}_X^*[r]}$ для ситуації б) визначається за формулами:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\tilde{K}_X^*[r_0]}^2 &= \begin{cases} \frac{2\tilde{D}_X^2}{N}, & r_0 = 0; \\ \frac{\tilde{D}_X^2}{N}, & r_0 = 1 \end{cases}, \\ \tilde{D}_X &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \tilde{m})^2\end{aligned} \quad (17.3б)$$

Схема розв'язання задачі

Для розв'язання нашого завдання потрібно:

- 1) за допомогою виразу (13.5) та таблиць значень інтегралу ймовірностей (13.6) знайти числовий параметр t_β ;
- 2) у ситуації а) - за допомогою виразу (17.3а) розрахувати $\sigma_{\bar{K}_X[r_0]}^*$; у ситуації б) - за допомогою виразу (17.3б) розрахувати $\tilde{\sigma}_{\bar{K}_X[r_0]}^*$.

Таким чином, структурна схема алгоритму розв'язання завдання в ситуації а) має вигляд, як показано на рис. 17.1а, а в ситуації б) – на рис. 17.1б.

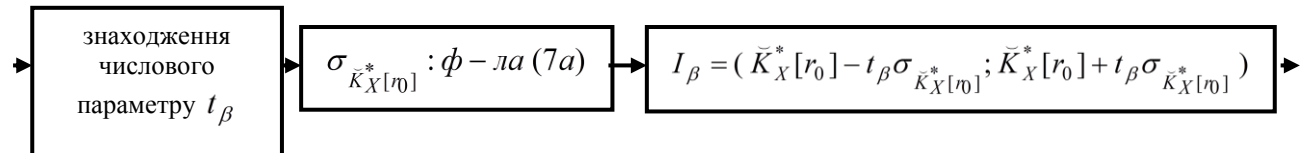


Рис. 17.1а

Аналітичні розрахунки

Аналітичні розрахунки можливі лише для ситуації а):

- 1) за допомогою виразу (13.5) та таблиць значень інтегралу ймовірностей (13.6) знаходимо числовий параметр t_β :

$$t_\beta = 1.96 \approx 2 ;$$

- 2) стандартне відхилення оцінки (17.1) для нульової та першої точок, згідно із (17.3а):

$$\sigma_{\bar{K}_X[r_0]}^* = \begin{cases} D_X \sqrt{\frac{2}{N}} = \sqrt{\frac{2}{100}} = 0.1414, & r_0 = 0; \\ D_X \sqrt{\frac{1}{100}} = 0.1, & r_0 = 1 \end{cases} ;$$

- 3) границі довірчого інтервалу:

$$I_\beta = \begin{cases} (\bar{K}_X^*[r] - 0.283; \bar{K}_X^*[r] + 0.283), & r = 0; \\ (\bar{K}_X^*[r] - 0.2; \bar{K}_X^*[r] + 0.2), & r = 1 \end{cases} .$$

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

Використання ПЕОМ доцільне в ситуації б), коли після визначення параметру t_β потрібно експериментально оцінити МЧ та дисперсію дискретного СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Процедuru такого оцінювання можна також змоделювати на ПЕОМ, наприклад, в середовищі програми Excel.

Етапи такого моделювання:

- 1) моделювання 100 значень дискретного нормального СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ з параметрами розподілу [0;1] (меню програми Excel: Сервіс/Аналіз даних/Генерування випадкових чисел);
- 2) оцінювання МЧ та дисперсії дискретного СВП $X(i\Delta t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ (меню програми Excel: Вставка/Функція/СРЗНАЧ, ДИСП, КОРЕНЬ);
- 3) визначення оцінки стандартного відхилення оцінки дисперсії за формулою (17.3б);
- 4) визначення границь довірчого інтервалу:

$$I_\beta = (\bar{K}_X^*[r_0] - t_\beta \tilde{\sigma}_{\bar{K}_X[r_0]}^* ; \bar{K}_X^*[r_0] + t_\beta \tilde{\sigma}_{\bar{K}_X[r_0]}^*) .$$

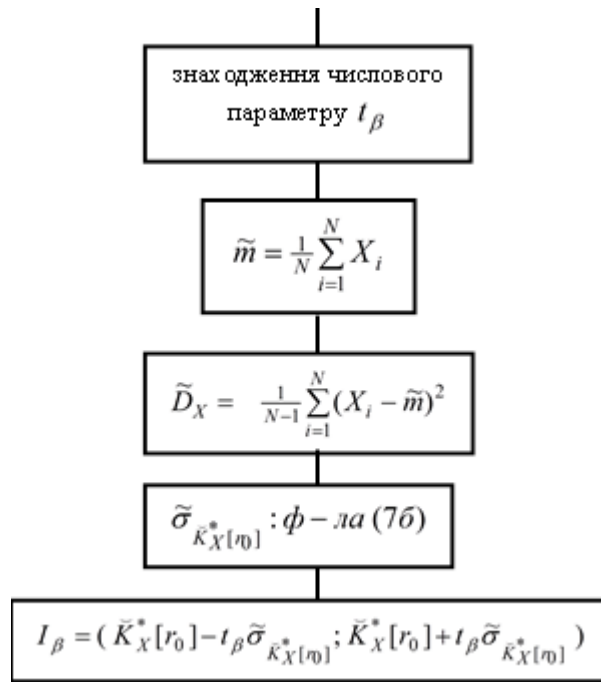


Рис. 17.16

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

В результаті проведеного моделювання одержано такі результати:

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= -0,029703; \quad \tilde{D}_X = 0,7287; \\ \tilde{\sigma}_{\tilde{K}_X[r_0]} &= \begin{cases} \tilde{D}_X \sqrt{\frac{2}{N}} = 0,7287 \cdot 0,1414 = 0,103, & r_0 = 0; \\ \tilde{D}_X \sqrt{\frac{1}{N}} = 0,073, & r_0 = 1 \end{cases} \\ I_\beta &= \begin{cases} (0,523; 0,935), & r = 0; \\ (-0,112; 0,180), & r = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидне досить велике розходження оцінки \tilde{D}_X із значенням D_X . В результаті бачимо, що істинне значення АКФ для нульової точки, що дорівнює 1, знаходиться поза межами знайденого довірчого інтервалу. Такий результат пояснюється малим об'ємом експериментальних даних (всього 100 значень). Збільшуючи цей об'єм, можна одержати краще співпадання – тим краще, чим більший об'єм експериментальних даних.

Задача 18

Відповідь: для випадку а) маємо:

$$I_\beta = \begin{cases} (\tilde{K}_y[r_0] - 0,12; \tilde{K}_y[r_0] + 0,12), & r_0 = 0; \\ (\tilde{K}_y[r_0] - 0,084; \tilde{K}_y[r_0] + 0,084), & r_0 = 4 \end{cases}$$

Для випадку б) в результаті комп'ютерного моделювання (в середовищі програми Excel) одержуємо:

$$I_\beta = \begin{cases} (0,1058; 0,2978), & r = 0; \\ (-0,0676; 0,0684), & r = 1 \end{cases}$$

Виявлення сигналів на тлі перешкод

Задача 19

Основні теоретичні відомості

Оцінка спектру у вигляді сирої періодограми має вигляд:

$$\bar{S}(f) = \frac{1}{T} |F(f, T)|^2, \quad (19.1)$$

де

$$F(f, T) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \quad X_T(t) = X(t) \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right),$$

T - інтервал часу спостереження СВП $X(t)$.

Математичне чекання сирої періодограми:

$$\langle \bar{S}(f) \rangle = S(f) \otimes T \text{Sa}^2(\pi f T), \quad (19.2)$$

де $S(f)$ - істинний спектр потужності безкінечного у часі СВП $X(t)$; $T \text{Sa}^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ -

функція, що враховує фінитність інтервалу спостереження T СВП $X(t)$.

Якщо СВП $X(t)$ є сума статистично незалежних гармонічного сигналу й шуму:

$$X(t) = s(t) + n(t),$$

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

де A и ω_0 - детерміновані амплітуда й частота, φ - випадкова фаза, рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 2\pi]$; $n(t)$ - обмежений за частотою (низькочастотний) білий шум із спектром потужності:

$$S_u(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & -B \leq f \leq B; \\ 0, & \text{ін.} f \end{cases}$$

тоді спектр потужності СВП $X(t)$ є сума спектрів потужності доданків:

$$S(f) = S_c(f) + S_u(f).$$

Тому (19.2) можна записати так:

$$\langle \bar{S}(f) \rangle = S_c(f) \otimes T \text{Sa}^2(\pi f T) + S_u(f) \otimes T \text{Sa}^2(\pi f T).$$

Для гармонічного сигналу з детермінованою амплітудою

$$S_c(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (19.3)$$

тому

$$S_c(f) \otimes T \text{Sa}^2(\pi f T) = \frac{E}{2} \{ \text{Sa}^2[\pi(f - f_0)T] + \text{Sa}^2[\pi(f + f_0)T] \},$$

де $E = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{A^2 T}{2}$ - енергія відрізка гармонічного сигналу.

Для обмеженого за частотою БШ, очевидно, в межах пласкої частини спектру

$$S_u(f) \otimes T \text{Sa}^2(\pi f T) = \frac{N_0}{2}, \quad -B < f < B,$$

Таким чином, квадрат відношення сигнал-шум на виході спектроаналізатору, що обчислює сиру періодограму:

$$(c/n)^2_{\text{вих}} = \frac{E}{N_0} = \frac{A^2 T}{2 N_0}.$$

Відношення сигнал-шум на вході спектроаналізатору – це відношення ефективних напруг сигналу й шуму:

$$(c/n)_{\text{вх}} = \frac{A/\sqrt{2}}{\sqrt{B N_0}}.$$

Тоді вииграш у відношенні сигнал-шум, що забезпечує спектроаналізатор:

$$Ви_2p = \frac{(c/n)_{вих}}{(c/n)_{вх}} = \sqrt{BT}.$$

Пов'яжемо цей вииграш з таким параметром цифрового спектроаналізатору як $N_{БПФ}$. Якщо частота дискретизації вибрана за Котельниковим, тобто $F_{\delta} = 2B$, одержуємо:

$$Ви_2p = \sqrt{\frac{N_{БПФ}}{2}}.$$

Цей результат можна пояснити так: потужність гармонічного сигналу сконцентрована в одному спектральному відліку (якщо частота гармоніки f_0 попадає у вузол сітки частот, тобто $k_0 = f_0/\Delta f$ - ціле число), а потужність білого шуму рівномірно розподіляється по $N_{БПФ}/2$ спектральним значенням. Тому якщо потужності гармоніки й шуму однакові, в спектральній області на частоті f_0 потужність гармонічного сигналу буде в $N_{БПФ}/2$ більше потужності спектральної компоненти шуму (див. рис. 19.1, де потужності сигналу й шуму прийняті однаковими і рівними одиниці):

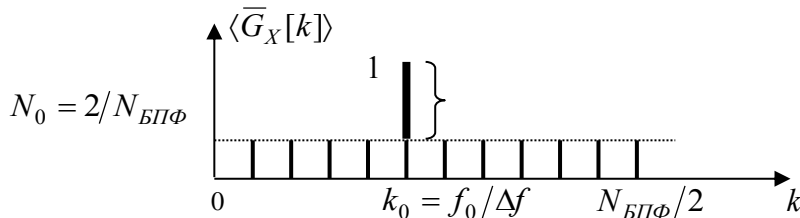


Рис. 19.1

Структурна схема пристрою (алгоритму)

Спектроаналізатор, що реалізує обчислення сирової періодограми за формулою (19.1), можна зобразити у вигляді структурної схеми, що показана на рис. 19.2.

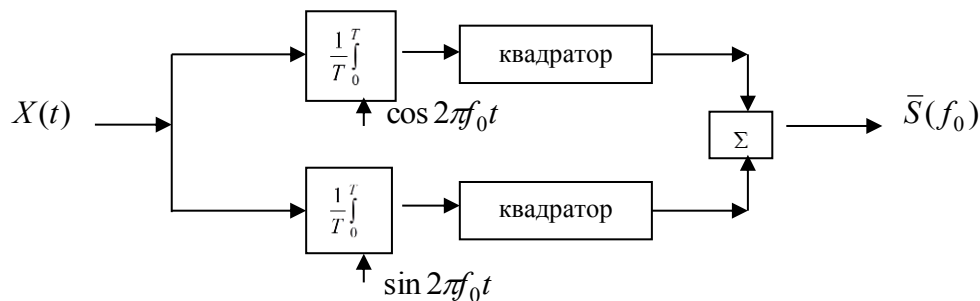


Рис. 19.2

Аналітичні розрахунки

Для $N_{БПФ} = 1024$ маємо:

$$Ви_2p = \sqrt{\frac{N_{БПФ}}{2}} = \sqrt{512} = 22,627$$

або, переводячи в децибели:

$$Ви_2p_{дБ} = 20 \lg 22,627 = 27 \text{ дБ}.$$

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

За допомогою ПЕОМ змодельовано ситуацію спектрального аналізу за умов, що на вході спектроаналізатру $(c/n)_{вх} = 1$. Тоді на виході спектроаналізатору повинно бути $(c/n)_{вих} = 27 \text{ дБ}$.

Для моделювання сигналу застосуємо команди програми **Matlab**, а для спектрального аналізу застосуємо програму **SpectraLAB**:

1) для моделювання суміші сигналу з шумом в командному вікні Matlab набираємо команди:

```

n = 1:25600;
x = sqrt(2)*cos(100*2*pi*n/1024);
y = randn(1,25600);
z = x + y;

```

Коментар 1: хоча за умовами задачі достатньо змодельовати 1024 значення суміші сигналу з шумом, ми моделюємо відліків в 25 разів більше для того, щоб подальшим накопиченням (при обробці) сирих періодограм від 25 сегментів, що не перекриваються у часі, зменшити дисперсію оцінки шумової частини спектру в 25 разів.

Коментар 2: амплітуду сигналу беремо $A = \sqrt{2}$ - тоді ефективне значення сигналу дорівнює 1; номер частотного відліку спектру задаємо $k_0 = 100$ - тоді пік спектру буде в 100-му вузлі сітки частот; шум беремо нормальним білим, з параметрами розподілу $[0,1]$;

2) зменшуємо рівень суміші перед записуванням у wav-файл (значення сигналу у wav-файлі не повинні виходити за межі $[-1,+1]$):

```

z1 = z/10;
wavwrite(z1,10310,16,'grmnoise.wav');

```

3) здійснюємо спектральний аналіз суміші за допомогою програми SpectraLAB:

а) встановлюємо параметри спектрального аналізу:

$F_s = 10310$; $N_{fft} = 1024$; window = uniform; average = infinite; FFT overlap = 0;

Коментар: було б зручно задати частоту дискретизації $F_s = 10240$ – тоді крок дискретизації по частоті дорівнював би “круглій” цифрі 10Гц ($\Delta f = \frac{F_s}{N_{fft}}$); але програма SpectraLAB не дозволяє вибрати довільну частоту дискретизації;

б) в режимі обробки записаного сигналу, виконуємо спектральний аналіз сигналу з файлу 'grmnoise.wav' (відкриваємо цей файл та запускаємо режим обробки командою **Run**)

Сигнал на вході спектроаналізатору має вигляд, як показано на рис. 19.3.

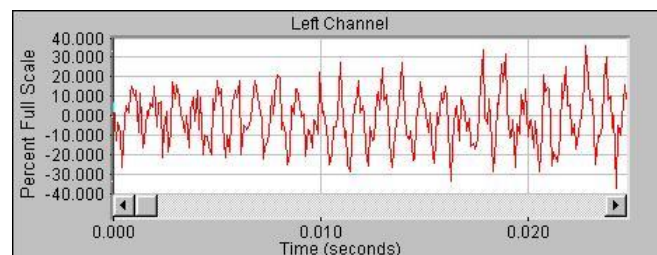


Рис. 19.3

На виході спектроаналізатору маємо оцінку спектру суміші сигналу з шумом (рис. 19.4).

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

Із графіку на рис. 19.4 видно, що вираз у відношенні сигнал-шум близький до теоретичного значення 27дБ. Наголошуємо, що під відношенням сигнал-шум в даному разі ми розуміємо відношення висоти сплеску гармонічного сигналу над спектром шуму до рівня шуму. Інакше кажучи – приріст математичного чекання суміші на частоті сигналу до математичного чекання спектру шуму.

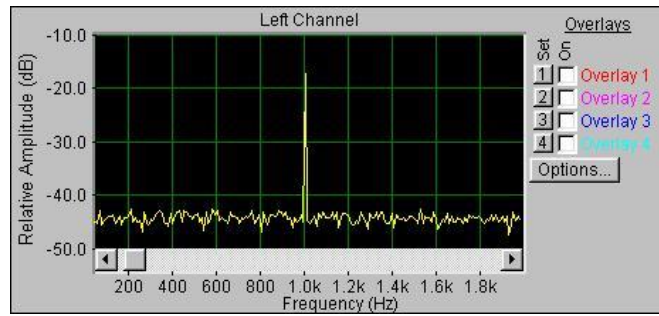


Рис. 19.4

В теорії оптимального виявлення відношення сигнал-шум на виході оптимальної системи визначають дещо інакше, а саме: як приріст математичного чекання спектральної оцінки до дисперсії цієї оцінки на частоті f_0 . В нашому випадку дисперсія спектральної оцінки на частоті f_0 цілком визначається дисперсією оцінки спектру шуму. Оскільки для сирової періодограми відносна дисперсія дорівнює одиниці на всіх частотах (окрім нульової), приходимо до висновку, що кількісно наше визначення відношення сигнал-шум співпадає з прийнятим в теорії оптимального виявлення.

Задача 20

Відповідь: 3,9 дБ.

Допоміжний коментар

Якщо частота гармоніки f_0 попадає в проміжок між вузлами сітки частот, тоді маємо “просочування” енергії гармонічного сигналу в декілька сусідніх дискретних компонент, що мають місце на виході спектроаналізатору. Амплітуда сигналу на виході спектроаналізатору при цьому знижується. Як наслідок – маємо програш у відношенні сигнал-шум (рис. 20.1).

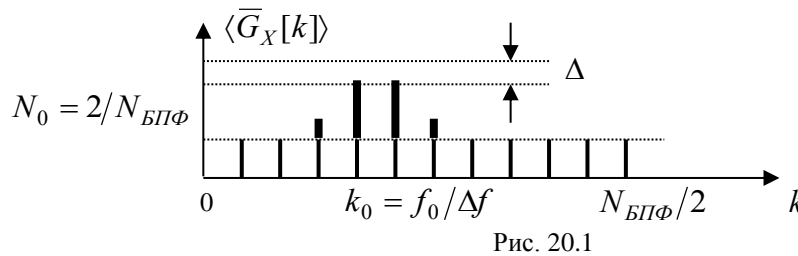


Рис. 20.1

Аналітично це можна відобразити так. На виході спектроаналізатору:

$$S_c(f) \otimes T Sa^2(\pi f T) = \frac{E}{2} \{ Sa^2[\pi(f - f_0)T] + Sa^2[\pi(f + f_0)T] \}.$$

Для дискретних додатних частот виконується $f = k\Delta f = k/T$, тому при $f_0 = k_0\Delta f = k_0/T$, тобто у попаданні у вузол сітки частот, маємо максимальне значення сигналу:

$$\frac{E}{2} Sa^2[\pi(f - f_0)T] = \frac{E}{2} Sa^2[\pi(k - k_0)] = \begin{cases} \frac{E}{2}, & k = k_0; \\ 0, & \text{in } k \end{cases}$$

В найгіршому випадку попадаємо посередині між вузлами сітки частот, тобто $f - f_0 = k\Delta f - (k_0 \pm 0.5)\Delta f = (k - k_0 \pm 0.5)/T$, в результаті максимальне значення сигналу дорівнює:

$$\frac{E}{2} Sa^2[\pi(f - f_0)T] = \frac{E}{2} Sa^2[\pi(k - k_0 \pm 0.5)] = \begin{cases} \frac{E}{2} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \right)^2, & k = k_0; \\ \neq 0, & \text{in } k \end{cases}$$

Як бачимо, потужність сигналу на виході спектроаналізатору зменшується в $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 2.467$ разів (на 3,9 дБ).

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

За допомогою ПЕОМ змодельовано ситуацію спектрального аналізу за умов, що на вході спектроаналізатору $(c/n)_{\text{вх}} = 1$. Тоді на виході спектроаналізатору повинно бути $(c/n)_{\text{вих}} = 27\text{дБ}$ за умов попадання частоти гармонічного сигналу у вузол сітки частот.

Для моделювання сигналу застосуємо команди програми **Matlab**, а для спектрального аналізу застосуємо програму **SpectraLAB**:

1) для моделювання суміші сигналу з шумом в командному вікні *Matlab* набираємо команди:

```
n = 1:25600;  
x = sqrt(2)*cos(100.5*2*pi*n/1024);  
y = randn(1,25600);  
z = x + y;
```

Коментар 1: хоча за умовами задачі достатньо змодельовати 1024 відліки суміші сигналу з шумом, ми моделюємо відліків в 25 разів більше для того, щоб подальшим накопиченням (при обробці) сирих періодограм від 25 сегментів, що неперекриваються у часі, зменшити дисперсію оцінки шумової частини спектру в 25 разів.

Коментар 2: амплітуду сигналу беремо $A = \sqrt{2}$ - тоді ефективне значення сигналу дорівнює 1; номер частотного відліку спектру задаємо $k_0 = 100$ - тоді пік спектру буде в 100-му вузлі сітки частот; шум беремо нормальним білим, з параметрами розподілу $[0,1]$;

2) зменшуємо рівень суміші перед записуванням у wav-файл (значення сигналу у wav-файлі не повинні виходити за межі $[-1,+1]$):

```
z1 = z/10;  
wavwrite(z1,10310,16,'grmnoise1.wav');
```

3) здійснюємо спектральний аналіз суміші за допомогою програми *SpectraLAB*:

а) встановлюємо параметри спектрального аналізу:

Fs = 10310; Nfft = 1024; window = uniform; average = infinite; FFT overlap = 0;

Коментар: було б зручно задати частоту дискретизації $F_s = 10240$ – тоді крок дискретизації по частоті дорівнював би “круглій” цифрі 10 Гц ($\Delta f = \frac{F_s}{N_{\text{fft}}}$); але програма *SpectraLAB* не дозволяє вибирати довільну частоту дискретизації;

б) в режимі обробки записаного сигналу, виконуємо спектральний аналіз сигналу з файлу **'grmnoise1.wav'** (відкриваємо цей файл та запускаємо режим обробки командою **Run**)

Сигнал на вході спектроаналізатора має вигляд, як показано на рис. 20.2.

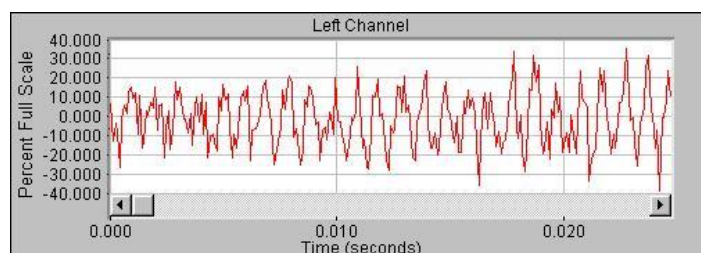


Рис. 20.2

На виході спектроаналізатору маємо оцінку спектру суміші сигналу з шумом (рис. 20.3).

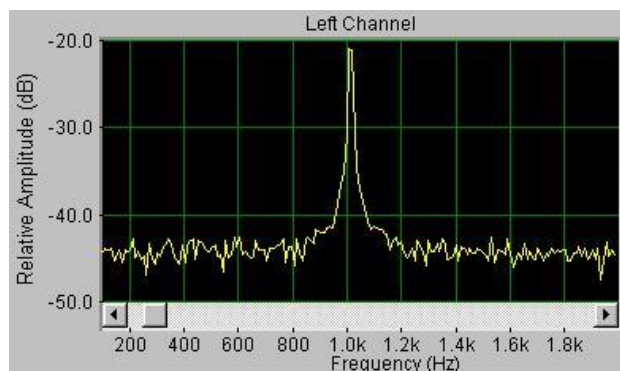


Рис. 20.3

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

Із графіку на рис. 20.3 видно, що виграш у відношенні сигнал-шум близький до теоретичного значення 23 дБ. За рахунок попадання частоти гармонічного сигналу в проміжок (а точніше – рівно в середину) між вузлами сітки частот, замість можливих 27 дБ одержано лише 23 дБ, тобто програш у відношенні сигнал-шум склав 4 дБ.

Задача 21

Основні теоретичні відомості

Оцінка Бартлета – це різновид непараметричних оцінок спектру потужності СВП, тому доцільно коротко нагадати основні види та властивості таких оцінок.

Лінійно-модифікована (ЛМ) періодограма:

$$\bar{S}_L(f) = \frac{1}{T} |F_L(f, T)|^2, \quad (21.1)$$

де $F_L(f, T)$ - перетворення Фур'є зваженого відрізка СВП $X(t)$:

$$F_L(f, T) = \int_0^T X(t) w_L(t) \exp(-j2\pi ft) dt,$$

де вікно (вагова функція) $w_L(t)$ повинно відповідати умовам:

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w_L^2(t) dt = 1.$$

Можна показати, що **ЛМ-періодограма** – асимптотично незміщена оцінка:

$$\langle \bar{S}_L(f) \rangle = S(f) \otimes T \text{Sa}^2(\pi f T),$$

тобто із збільшенням довжини T відрізка СВП $X(t)$ математичне чекання наближується до істинного спектру $S(f)$.

Але *дисперсія* такої оцінки не зменшується із ростом T :

$$\frac{D[\bar{S}_L(f)]}{\langle \bar{S}_L(f) \rangle^2} = \begin{cases} 2 & \text{при } f = 0 \\ 1 & \text{при } f \neq 0 \end{cases}, \quad T \rightarrow \infty$$

Значно кращі статистичні властивості **квадратично-модифікованої (КМ) періодограми**:

$$\bar{S}_Q(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\tau) w_Q(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad (21.2)$$

де $\bar{K}(\tau)$ - оцінка кореляційної функції, а вікно затримок (ще один різновид вагових функцій) $w_Q(\tau)$ повинно відповідати умовам:

$$w_Q(0) = 1.$$

КМ-періодограма – асимптотично незміщена оцінка:

$$\langle \bar{S}_Q(f) \rangle = S(f) \otimes W_Q(f),$$

тобто її математичне чекання із збільшенням довжини T наближується до істинного спектру $S(f)$ (спектральне вікно $W_Q(f)$ пов'язано із $w_Q(\tau)$ парою перетворень Фур'є).

Більш того, дисперсія КМ-періодограми необмежено зменшується при узгодженому збільшенні T та ефективної ширини τ_0 вікна $w_Q(\tau)$

$$\frac{D[\bar{S}_Q(f)]}{\langle \bar{S}_Q(f) \rangle^2} = \begin{cases} \frac{\tau_0}{T}, & f \neq 0, \\ \frac{2\tau_0}{T}, & f = 0. \end{cases}$$

Бартлетт (Bartlett) запропонував розділяти сигнал на сегменти, що не перекриваються, та обчислювати для кожного сегменту «звичайну» (тобто ЛМ-періодограму з вікном прямокутної форми) періодограму й потім ці періодограми усереднювати (рис. 21.1).

Аналітично оцінку Бартлетта можна записати так:

$$\bar{S}_B(f) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{S}(f),$$

Можна показати, що

$$\bar{S}_B(f) = \int_{-T_0}^{T_0} \left(1 - \frac{|\tau|}{T_0}\right) \text{rect}\left(\frac{\tau}{2T_0}\right) \bar{K}_1(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau,$$

де

$$\bar{K}_1(\tau) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left\{ \frac{1}{T_0 - |\tau|} \int_0^{T_0 - |\tau|} X(t + iT_0) X(t + |\tau| + iT_0) dt \right\}.$$

Неважко бачити, що оцінка Бартлетта дуже схожа на КМ-періодограму – тому вікно трикутної форми

$$w_Q(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{T_0}\right) \text{rect}\left(\frac{\tau}{2T_0}\right)$$

звичайно називають «вікном Бартлетта».

Пізніше **Уелч** (Welch) вніс в метод Бартлетта два вдосконалення: застосування вагової функції й розбиття сигналу на сегменти, що *перекриваються*. Застосування вагової функції дозволяє зменшити розтікання спектру й зменшити зміщення оцінки спектру ціною деякого погіршення розрізняючої здатності. Перекриття сегментів дозволяє краще використати енергію сигналу, що аналізується.

Оскільки оцінка Бартлетта є окремим випадком оцінки Уелча, в програмі Matlab для конструювання оцінки Бартлетта слід користуватися командою для оцінки Уелча.

Аналітичні та чисельні розрахунки

- 1) знання верхньої граничної частоти $f_g = 20$ кГц дозволяє вибрати частоту дискретизації $F_s = 2f_g = 40$ кГц;
- 2) апіорна інформація про практичну рівномірність спектру СВП в смузі частот 500 Гц, дозволяє вибрати довжину сегменту τ_0 :

$$\tau_0 = \frac{1}{500} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ c}$$

- 3) кількість сегментів I вибираємо, виходячи із вимог до точності оцінки спектру, та враховуючи, що дисперсія оцінки Бартлетта дорівнює дисперсії середнього арифметичного із I ЛМ-періодограм:

$$D[\bar{S}_B(f)] = \frac{1}{I^2} \sum_{i=1}^I D[\bar{S}(f)] = \frac{D[\bar{S}(f)]}{I},$$

$$\frac{D[\bar{S}_B(f)]}{\langle \bar{S}_B(f) \rangle^2} \approx \frac{D[i\bar{S}(f)]}{\langle i\bar{S}(f) \rangle^2} \cdot \frac{1}{I} \approx \frac{1}{I} \leq 0.05^2 = 0.0025, \\ I \geq 400.$$

Таким чином, для аналізу потрібно 400 сегментів довжиною 2 мс кожний, тобто загальна довжина відрізка часу повинна складати $T = I\tau_0 = 0,8\text{с}$.

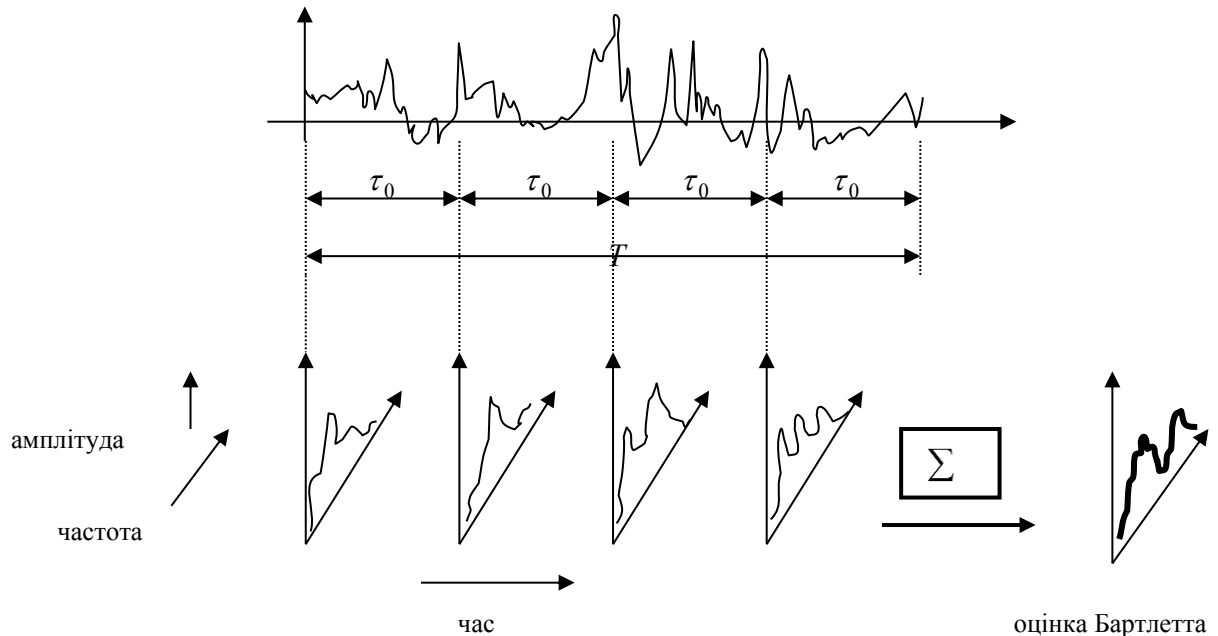


Рис. 21.1

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

Змодельюємо проведення спектрального аналізу за допомогою оцінки Бартлетта на ПЕОМ. При цьому зручно використати програму Matlab.

1) розрахуємо параметр БПФ для окремого сегменту:

$$N_{fft} = \tau_0 F_s = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 10^3 = 80.$$

2) Оскільки рекомендується вибирати параметр БПФ як ступінь двійки, вибираємо найближче зверху значення:

$$N_{fft} = 128;$$

3) для аналізу потрібно 400 сегментів, тому загальне число відліків процесу повинно бути:

$$N = IN_{fft} = 400 \cdot 128 = 51200.$$

4) команди для виконання із командного вікна програми Matlab:

```
x=randn(1,51200);
nfft=128;
win=boxcar (128);
noverlap=0;
fs=40000;
[pxx,f]=pwelch(x,win,noverlap,nfft,fs);
psdplot(pxx,f,'Hz','linear')
```

5) в результаті обчислень повинен побудуватися графік оцінки спектру білого нормального шуму із одиничною дисперсією в смузі частот 0-20 кГц (рис. 21.2).

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

Потрібно було забезпечити відносне стандартне відхилення оцінки спектру Бартлетта не більше 5%. Із графіку на рис. 21.2 видно, що максимальне відхилення оцінки спектру від

середнього значення приблизно дорівнює 12-15%. Оскільки після усереднення за 400 “сегментарними” оцінками спектру розподіл одержаної оцінки близький до нормального, доходимо висновку, що за правилом “3-х сігма” середноквадратична похибка близька 4-5%, що добре узгоджується із умовами задачі та аналітичними розрахунками.

Разом з тим констатуємо, що для експерименту знадобився відрізок даних довжиною 52100 значень або 1,28 с, що в 1,6 разів більше, ніж було потрібно за результатами аналітичних розрахунків. Це збільшення досить типове й пояснюється вимогами до параметру БПФ, котрий бажано приймати рівним ступені двійки (так, ми взяли параметр БПФ 128 замість 80).

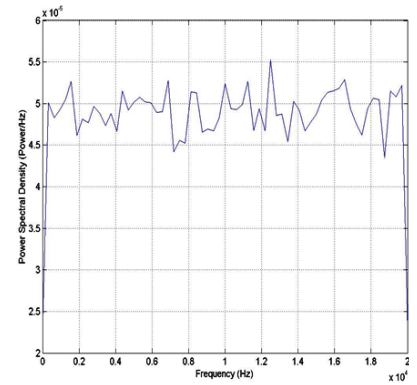


Рис. 21.2

Задача 22

Відповідь: для аналізу потрібно 400 сегментів довжиною 10 мс кожний, тобто загальна довжина відрізка часу повинна складати $T = I\tau_0 = 400 \cdot 10^{-2} = 4\text{с}$.

Допоміжний коментар

- 1) знання верхньої граничної частоти $f_g = 20$ кГц дозволяє вибрати частоту дискретизації $F_s = 2f_g = 40$ кГц;
- 2) апіорна інформація про практичну рівномірність спектру СВП в смузі частот 500 Гц, дозволяє вибрати довжину сегменту τ_{01} :

$$\tau_{01} = \frac{1}{500} = 2 \cdot 10^{-3} \text{с},$$

але інформація про можливу наявність в сигналі декількох неперервних гармонічних сигналів з мінімальною різницею між частотами 200 Гц змушує нас розрахувати ще одне значення довжини сегменту τ_{02} :

$$\tau_{02} = \frac{1}{200} = 5 \cdot 10^{-3} \text{с}.$$

Для надійності розділення спектральних піків збільшимо τ_{02} вдвоє, тобто візьмемо $\tau_{02} = 10^{-2} \text{с}$.

Із двох одержаних значень довжини сегменту вибираємо більше значення, тобто $\tau_{02} = 10^{-2} \text{с}$. Це дозволяє сподіватися на розділення спектральних піків, розташованих на відстані 200 Гц один від одного, хоча й це робиться ціною збільшення часу спостереження випадкового процесу, що аналізується;

- 3) кількість сегментів I вибираємо, виходячи із вимог до точності оцінки спектру (похибка вимірювань спектру на ділянках «чистого» шуму не повинна перевищувати 5%), та враховуючи, що дисперсія оцінки Бартлета дорівнює дисперсії середнього арифметичного із I ЛМ-періодограм:

$$D[\bar{S}_B(f)] = \frac{1}{I^2} \sum_{i=1}^I D[\bar{S}^i(f)] = \frac{D[\bar{S}^i(f)]}{I},$$

$$\frac{D[\bar{S}_B(f)]}{\langle \bar{S}_B(f) \rangle^2} \approx \frac{D[\bar{S}^i(f)]}{\langle \bar{S}^i(f) \rangle^2} \cdot \frac{1}{I} \approx \frac{1}{I} \leq 0.05^2 = 0.0025,$$

$$I \geq 400.$$

Таким чином, для аналізу потрібно 400 сегментів довжиною 10 мс кожний, тобто загальна довжина відрізка часу повинна складати $T = I\tau_0 = 400 \cdot 10^{-2} = 4\text{с}$.

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

Змоделюємо проведення спектрального аналізу за допомогою оцінки Бартлета на ПЕОМ. При цьому зручно використати програму Matlab.

Розрахуємо параметр БПФ для окремого сегменту:

$$N_{fft} = \tau_0 Fs = 10^{-2} \cdot 40 \cdot 10^3 = 400.$$

Оскільки рекомендується вибирати параметр БПФ як ступінь двійки, вибираємо найближче зверху значення:

$$N_{fft} = 512.$$

Для аналізу потрібно 400 сегментів, тому загальне число відліків процесу повинно бути:

$$N = IN_{fft} = 400 \cdot 512 = 204800.$$

Змоделюємо та обробимо процес, що складається із суміші білого шуму одиначної дисперсії та двох гармонік одиначної амплітуди, частоти яких розрізняються на 200Гц. Команди для виконання із командного вікна програми Matlab:

```
x=randn(1,204800);
nfft=512;
fs=40000;
df=fs/nfft;
f1=120*df;
f2=f1+200;
i=1:204800;
s1=cos(2*pi*f1*i/fs);
s2=cos(2*pi*f2*i/fs);
x=x+s1+s2;
win=boxcar(512);
noverlap=0;
pwelch(x,win,noverlap,nfft,fs)
```

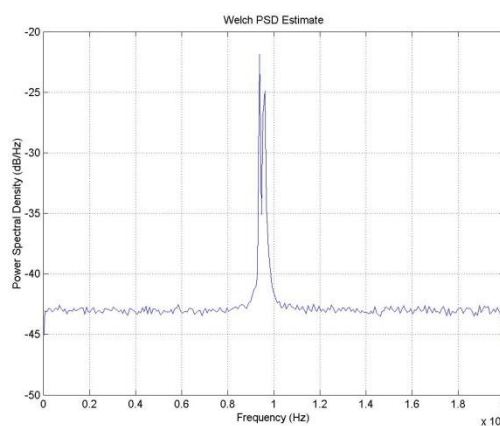


Рис. 22.1

В результаті обчислень повинен побудуватися графік оцінки спектру суміші білого нормального шуму із одиначною дисперсією в смузі частот 0-20 кГц та двох гармонічних сигналів, частоти яких різняться на 200 Гц (рис. 22.1).

Співставлення аналітичних розрахунків та розрахунків на ПЕОМ

Було потрібно вибрати такі параметри спектрального аналізу, щоб забезпечити розділення гармонік із частотами, що різняться на 200 Гц, а також відносне стандартне відхилення оцінки спектру Бартлета в межах «чистого» шуму не більше 5%. Проведення модельного експерименту на ПЕОМ показало, що зроблені розрахунки вірні. Із графіку на рис.2 видно, що спектральні пики можна розрізнити, а максимальне відхилення оцінки спектру від середнього значення не перевищує 5% в межах пласкої частини спектру.

Разом з тим констатуємо, що для експерименту знадобився відрізок даних довжиною 204800 значень або 5,12 с, що в 1,28 разів більше, ніж було потрібно за результатами аналітичних розрахунків. Це збільшення досить типове й пояснюється вимогами до параметру БПФ, котрий бажано приймати рівним ступені двійки (так, ми взяли параметр БПФ 512 замість 400).

Задача 23

Основні теоретичні відомості

Акустичним відгуком кімнати йменують спектр сигналу на виході вимірювального мікрофона, розташованого у визначному місці кімнати (наприклад, посередині кімнати), за умови, що в іншому місці кімнати розташована акустична система (рис. 23.1).

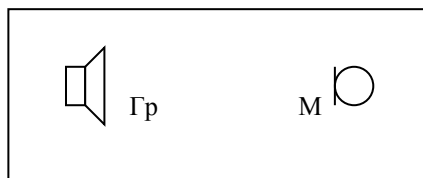


Рис. 23.1

Якщо ціль вимірювань складається лише у вимірі акустичних характеристик кімнати, тоді на вхід акустичної системи потрібно подавати білий шум, а спектральний аналіз проводити в лінійному масштабі частот. Покажемо це.

Представимо кімнату як деяку лінійну систему (рис. 23.2) з передатною характеристикою $H(f)$.

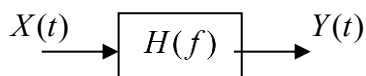


Рис. 23.2

З огляду на те, що зв'язок між входом і виходом лінійної системи спектральною мовою описується співвідношенням

$$F_Y(f) = H(f)F_X(f),$$

АЧХ системи визначається як модуль відношення перетворень Фур'є відгуку та впливу:

$$H(f) = \left| \frac{F_Y(f)}{F_X(f)} \right|.$$

При цьому експериментальні вимірювання зводяться до спектрального аналізу сигналів на вході й виході системи, з наступним виконанням операції добутку двох функцій частоти.

Інший метод вимірювання базується на застосуванні в якості впливу випадкового стаціонарного сигналу $X(t)$. При цьому спектри потужності відгуку й впливу зв'язані співвідношенням:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f).$$

Якщо вхідний процес – білий шум зі спектральною щільністю потужності N_0 , тоді

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 N_0.$$

При цьому експериментальні виміри зводяться до спектрального аналізу сигналу тільки на виході системи, за умови, що на вхід системи подається білий шум.

Якщо кінцева мета вимірів - таке настроювання еквайзера акустичної системи, при якому компенсуються нерівності акустичної характеристики кімнати, тоді в якості сигналу $X(t)$ доцільно використовувати не білий шум, а рожевий. Покажемо це.

Якщо спектр рожевого шуму, починаючи з деякої частоти, має вигляд функції $1/f$, тоді при ідеальній акустичній характеристиці кімнати маємо:

$$S_Y(f) = S_X(f) \approx \frac{a}{f}.$$

Якщо провести спектральний аналіз процесу на виході мікрофона за допомогою гребінки 1/3-октавних фільтрів (фільтри еквайзера саме 1/3-октавні):

$$f_g = 2^{\frac{1}{3}} f_n,$$

де f_{ϵ} , f_n - відповідно верхні й нижня граничні частоти фільтра, тоді потужності процесів на виході кожного з фільтрів гребінки будуть однаковими. Дійсно, розглянемо два таких суміжних фільтри (рис. 23.3) і знайдемо потужності процесів на виході кожного з них:

$$f_{\epsilon 1} = 2^{\frac{1}{3}} f_{n1}, \quad f_{\epsilon 2} = 2^{\frac{1}{3}} f_{n2}, \quad f_{\epsilon 1} = f_{n2}.$$

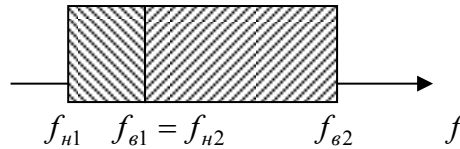


Рис. 23.3

Потужність процесу на виході першого фільтра:

$$P_1 = a \int_{f_{n1}}^{f_{\epsilon 1}} \frac{1}{f} df = a \ln |f| \Big|_{f_{n1}}^{f_{\epsilon 1}} = a (\ln f_{\epsilon 1} - \ln f_{n1}) = a \ln \frac{f_{\epsilon 1}}{f_{n1}} = a \ln 2^{\frac{1}{3}}.$$

Аналогічно для другого фільтра:

$$P_2 = a \ln 2^{\frac{1}{3}}.$$

Таким чином, на виході кожного із гребінки 1/3-октавних фільтрів будуть однакові значення.

Структурна схема

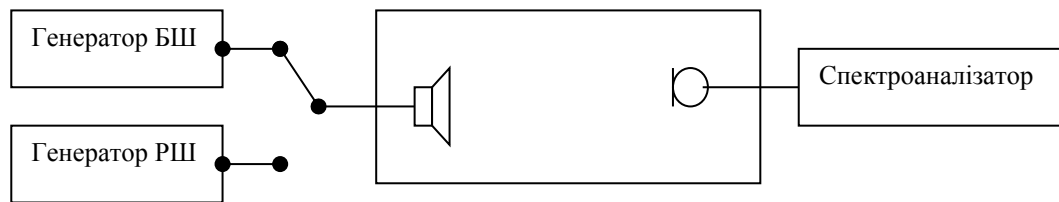


Рис. 23.4

Система для вимірювання акустичної характеристики кімнати показана на рис. 23.4. Це генератори білого й рожевого шуму, акустична система, вимірювальний мікрофон, спектроаналізатор. У якості спектроаналізатору можна використовувати ПЕОМ зі звуковою картою й програмним спектроаналізатором.

У якості програмного спектроаналізатора можна використати довільну зручну програму – наприклад, зручно використовувати програму SpectraLAB - це потужний двохканальний спектроаналізатор, програмно сумісний з будь-якою звуковою картою, що підтримується Windows. SpectraLAB забезпечує проведення спектрального аналізу в реальному масштабі часу, а також спектральний аналіз попередньо записаних сигналів. Алгоритм БПФ, що використовується у програмі, дозволяє обробляти запис довжиною до 65536 відліків. Одержаний спектр сигналу може бути представлений на різних логарифмічних шкалах, із роздільною здатністю за частотою 1/1, 1/3, 1/6, 1/9, 1/12 октави.

Аналітичні розрахунки

Основні параметри цифрового спектрального аналізу акустичних сигналів:

- 1) частота дискретизації;
- 2) параметр БПФ;
- 3) тип спектральної оцінки;
- 4) форма вагових вікон.

Оскільки мова йде про вимірювання акустичних характеристик кімнати, вважаємо, що верхня гранична частота акустичного сигналу дорівнює 20 кГц. Отже, частота дискретизації повинна

бути 44100 Гц (стандартна величина з ряду можливих значень). Параметр БПФ варто вибирати досить великим при 1/3-октавному шкалюванні осі частот (8192 або 16384), й можна робити не дуже великим (наприклад, 1024) при лінійному масштабі осі частот.

Оскільки в спектрі відсутні піки, застосування вагового вікна недоцільно. Для одержання малої дисперсії оцінки спектра доцільно застосувати оцінку Барлета - тобто здійснити накопичення періодограм кожного з сегментів сигналу. При використанні генератора білого шуму масштаб шкали частот - лінійний. При використанні генератора рожевого шуму масштаб шкали частот - 1/3-октавний.

Процедура вимірювань:

- встановити повзунки еквайзера акустичної системи в нуль або в рівну лінію;
- приєднати до входу акустичної системи генератор;
- помістити вимірювальний мікрофон у центрі кімнати;
- погодити коефіцієнти підсилення звукової системи й звукової карти так, щоб сигнал не обмежувався за амплітудою;
- запустити аналізатор і досліджувати зображення спектра;
- зупинити аналіз, коли форма спектра стабілізується.

Планування та проведення розрахунків на ПЕОМ

Установка основних параметрів:

Режим: реального часу.

Перегляд: спектра, сигналу.

Вісь амплітуд: логарифмічна, вісь частот: 1/3-октавна.

Частота дискретизації: 44100 Гц.

Розмір БПФ: 8192 або 16384.

Розмір усереднення: нескінченність.

Вагове вікно: прямокутне.

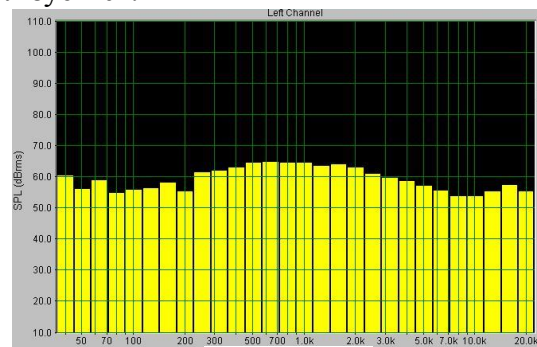


Рис. 23.5

Результати вимірів показані на рис. 23.5.

Інтерпретація експериментальних результатів

Акустично "рівна" кімната дає рівний спектр відгуку. Кожна 1/3-октавна смуга відповідає повзункові 1/3-октавного еквайзера акустичної системи. Тому для компенсації частотної нерівномірності акустичного відгуку кімнати потрібно виставити лінію повзунків еквайзера «дзеркально» до рівня спектру відгуку.

У даному прикладі спостерігається підйом частотної характеристики кімнати в діапазоні від 300 Гц до 3 кГц. Отже, повзунки еквайзера акустичної системи потрібно виставити з «прогином» у зазначеній смузі частот.

Задача 24

Відповідь: якщо мета вимірювань складається лише у вимірі акустичних характеристик кімнати, тоді на вхід акустичної системи потрібно подавати білий шум, а спектральний аналіз проводити в лінійному масштабі частот. Якщо кінцева мета вимірювань - таке настроювання еквайзера акустичної системи, при якому компенсуються нерівності акустичної характеристики кімнати, тоді в якості сигналу $X(t)$ доцільно використовувати не білий шум, а рожевий.

Задача 25

Основні теоретичні відомості

При виявленні повністю відомого сигналу на тлі обмеженого по частоті білого гаусівського шуму оптимальний виявлювач повинен містити взаємно-кореляційну систему і обчислювати взаємну енергію «опорного» сигналу й спостережуваної суміші. Рішення про наявність сигналу в суміші приймається, якщо оцінка взаємної енергії перевищує поріг U_0 :

$$E_{UV}(0) = \int_0^T u_1(t)v(t)dt \geq \frac{N_0}{2} \ln \Lambda_0 + \frac{E}{2} = U_0,$$

де $E = \int_0^T v^2(t)dt$ - енергія сигналу; N_0 - спектральна щільність обмеженого по смузі білого

шуму; $\Lambda_0 = \frac{R_{01}P(a_0)}{R_{10}P(a_1)}$ (тут R_{01} і R_{10} - ризики фіктивної тривоги й невиявлення сигналу, відповідно; $P(a_0)$ і $P(a_1)$ - імовірності відсутності й наявності сигналу).

Структурна схема оптимального приймача для випадку суміші повністю відомого сигналу й обмеженого по частоті білого гаусівського шуму наведена на рис. 25.1.

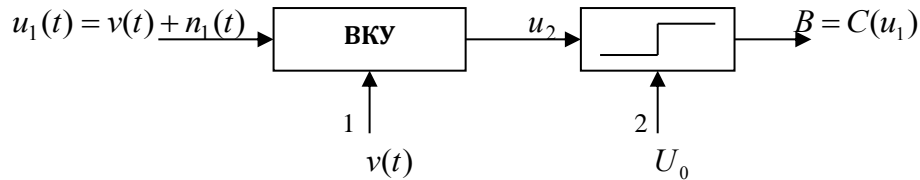


Рис. 25.1

При відсутності сигналу на виході корелятора спостерігається СВ $u_2 = n_2$:

$$n_2 = \int_0^T n_1(t)v(t)dt.$$

Математичне очікування (МО) СВ $u_2 = n_2$:

$$\langle n_2 \rangle = \int_0^T \langle n_1(t) \rangle v(t)dt = 0. \quad (25.1)$$

Дисперсія СВ $u_2 = n_2$:

$$\sigma_{2u}^2 = \frac{N_0 E}{2}. \quad (25.2)$$

При наявності сигналу на виході корелятора спостерігається СВ $u_2|_{cu}$:

$$u_2|_{cu} = \int_0^T (v(t) + n_1(t))v(t)dt = \int_0^T v^2(t)dt + \int_0^T n_1(t)v(t)dt = v_2 + n_2.$$

МО СВ $u_2|_{cu}$:

$$\langle u_2|_{cu} \rangle = \langle v_2 + n_2 \rangle = E. \quad (25.3)$$

Дисперсія СВ $u_2|_{cu}$:

$$\sigma_2^2|_{cu} = \langle (v_2 + n_2)^2 \rangle - \langle (v_2 + n_2) \rangle^2 = \langle n_2^2 \rangle = \frac{N_0}{2} E. \quad (25.4)$$

Відношення сигнал-шум на вході оптимального виявлювача:

$$\left(\frac{c}{n}\right)_{\text{вх}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)dt}}{\sigma_u} = \frac{\sqrt{\frac{E}{T}}}{\sqrt{N_0 f_s}} = \sqrt{\frac{E}{N_0 f_s T}}. \quad (25.5)$$

Відношення сигнал-шум на виході оптимального виявлювача:

$$\left(\frac{c}{n}\right)_{\text{ввлх}} = \frac{E}{\sigma_{2\text{сш}}} = \frac{E}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}. \quad (25.6)$$

Аналітичне рішення

Виграш у відношенні сигнал-шум:

$$Вигр = \frac{\left(\frac{c}{n}\right)_{\text{ввлх}}}{\left(\frac{c}{n}\right)_{\text{вх}}} = \sqrt{2f_e T}. \quad (25.7)$$

Числове рішення

Підставляючи дані в (25.7), одержуємо:

$$Вигр = \sqrt{2f_e T} = \sqrt{10000 \cdot 1} = 100 \text{ раз (по напрузі)}$$

або 40 дБ.

Помітимо, що при виявленні гармонійного сигналу корелятор виконує функцію косинус-перетворення Фур'є.

$$E_{UV}(0) = \int_0^T u_1(t)v(t)dt = \int_0^T u_1(t) \cos 2\pi f t dt.$$

Тому виграш (25.7) зручно зв'язати з параметром БПФ:

$$Вигр = \sqrt{N_{\text{БПФ}}}$$

Моделювання на ПЕОМ

Змоделювати даний фрагмент оптимального виявлювача гармонійного сигналу з відомою фазою дуже просто: потрібно обчислити *дійсну частину перетворення Фур'є* (косинусне перетворення Фур'є) від вхідного сигналу. Якщо вхідне відношення сигнал-перешкода дорівнює 1 (0 дБ), тоді різниця між піком гармоніки й рівнем спектра перешкоди (який, як можна показати, дорівнює дисперсії суміші сигналу й перешкоди) повинна в точності дорівнювати виграшу у відношенні сигнал-шум. Змоделюємо саме таку ситуацію. Команди для виконання в командному вікні програми Matlab:

```

Fs=10000; dt=1/Fs; f0=1000; A=sqrt(2);
i=1:10000;
x=A*cos(2*pi*f0*i*dt);
n=randn(1,10000);
u1=x+n;
nfft=10000;
u2=abs(real(fft(u1,nfft)));
u2(5002:nfft)=[];
df=Fs/nfft;
f=0:df:Fs/2;
plot(f,20*log10(u2))

```

На рис. 25.2 видно, що різниця між середнім рівнем шуму й максимальним значенням спектрального піка, обумовленого наявністю гармонійного сигналу, дійсно близька 40 дБ. Більш впевнений висновок можна було б зробити, якби можна було

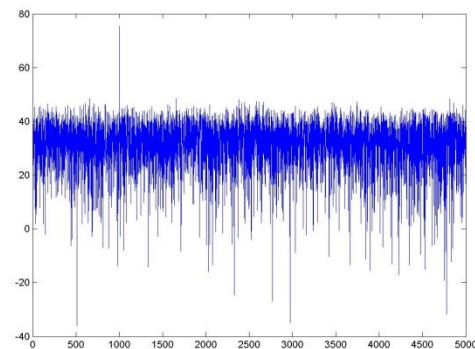


Рис. 25.2

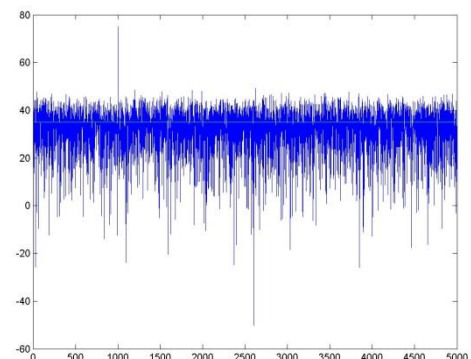


Рис. 25.3

точніше виміряти середній рівень спектра шуму. Для цього обчислимо середній рівень спектра перешкоди по відлікам спектра перешкоди, що лежить у діапазоні частот 1500 - 5000 Гц.

При цьому остання команда програми дещо зміниться - додасться графік більш точної оцінки спектра перешкоди. Крім того, їй будуть передувати ще 2 команди:

```
N=nfft/2+1;  
n0(1:N)=mean(u2(1500:nfft/2));  
plot(f,20*log10(u2),f,20*log10(n0),'g')
```

Результат обчислень показаний на рис. 25.3. На графіку чітко видно середнє значення спектра шуму, що дозволяє значно більш упевнено затверджувати, що виграш у відношенні сигнал-шум дійсно дорівнює 40 дБ.

Задача 26

Відповідь: $q_n \approx 6$ (15.6 дБ).

Моделювання на ПЕОМ

Змоделювати даний фрагмент оптимального виявлювача гармонійного сигналу з відомою фазою дуже просто: потрібно обчислити *уявну частину перетворення Фур'є* від вхідного сигналу. Чому саме мниму: вхідний сигнал записаний як косинусоїда з початковою фазою $\frac{\pi}{2}$

- легко переконатися, що це синусоїда, а виходить, корелятор – це синусне перетворення Фур'є.

Змодельємо ситуацію, що відповідає параметрам сигналу й перешкоди, зазначеним в умові завдання.

Команди для виконання в командному вікні програми Matlab:

```
Fs=12000; dt=1/Fs; f0=2000; A=1;  
i=1:12000;  
x=A*cos(2*pi*f0*i*dt+pi/2);  
sig=2;  
n=sig*randn(1,12000);  
u1=x+n;  
nfft=12000;  
u2=abs(imag(fft(u1,nfft)));  
u2(6002:nfft)=[];  
df=Fs/nfft;  
f=0:df:Fs/2;  
plot(f,20*log10(u2))
```

На рис. 26.1 видний спектральний пік, обумовлений наявністю гармонійного сигналу. Істотне перевищення цим піком рівня перешкоди й дає можливість виявлення сигналу на тлі перешкоди.

Цікаво було б відобразити на графіку знайдене нами граничне відношення сигнал-шум $q_n \approx 6$ (15.6 дБ). Для цього знаходимо середнє значення спектра шуму (усереднюючи відліки спектра перешкоди, що лежать у діапазоні частот 2500 - 6000 Гц.) і додаємо до нього 15.6 дБ - це і є

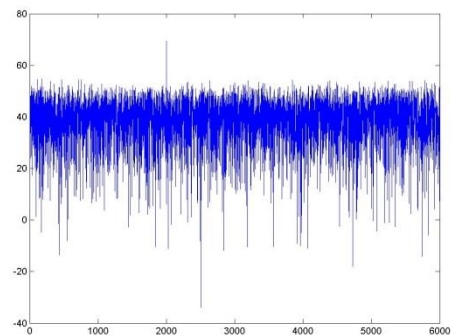


Рис. 26.1

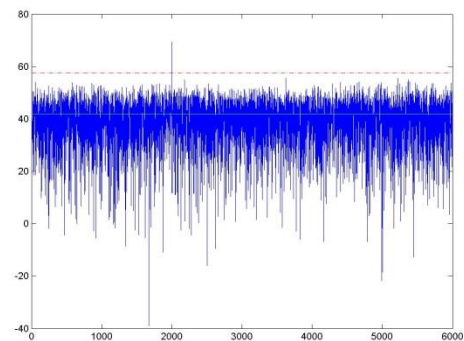


Рис. 26.2

граничне значення сигналу (рис. 26.2). У програмі при цьому останню команду варто замінити на:

```
N=nfft/2+1;  
n0(1:N)=mean(u2(2500:nfft/2));  
plot(f,20*log10(u2),f,20*log10(n0),'g', f,20*log10(n0)+15.6,'-r')
```

Задача 27

Основні теоретичні відомості

Для вузькосмугового сигналу із огинаючою $V(t)$:

$$v(t, \varphi) = V(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi),$$

де початкова фаза φ – СВ, рівномірно розподілена в діапазоні значень $[0, 2\pi]$, тобто

$$W(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0, & \text{дп. } \varphi. \end{cases}$$

обмеженого по смузі частот білого шуму, оптимальний приймач являє собою двохканальну систему (рис. 27.1)

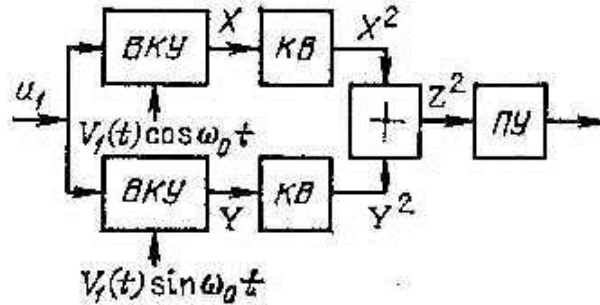


Рис. 27.1

Припустимо, що на вхід подається сигнал. Тоді на виході «косинусного» каналу

$$\begin{aligned} X_c &= \int_0^T v(t, \varphi) V(t) \cos 2\pi f_0 t dt = \int_0^T V(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) V(t) \cos 2\pi f_0 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \cos \varphi \int_0^T V^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T V^2(t) \cos(4\pi f_0 t + \varphi) dt \approx E \cos \varphi. \end{aligned} \quad (27.1)$$

Аналогічно на виході «синусного» каналу

$$Y_c = E \sin \varphi. \quad (27.2)$$

Після квадратування й підсумовування:

$$Z_c^2 = X_c^2 + Y_c^2 = E^2, \quad (27.3)$$

як бачимо, результат не залежить від φ (що й потрібно).

В окремому випадку $\varphi = 0$ маємо $X_c = E$ й $Y_c = 0$ - сигнал виділяється косинусним каналом.

А при $\varphi = \pi/2$ маємо $X_c = 0$ й $Y_c = E$ - сигнал виділяється синусним каналом.

Якщо на вхід двохканальної системи подати тільки шум, можна показати, що СВ X_u і Y_u некорельовані, а отже, і статистично незалежні (бо є гаусівськими). Тому дисперсія суми їхніх квадратів дорівнює сумі дисперсій цих квадратів. Як наслідок - дана оптимальна система повинна програвати такій для випадку точно відомого сигналу в завадостійкості.

Поняття фіктивної тривоги зручно пояснити, користуючись графіком розподілу щільності ймовірностей СВ Z_u^2 на виході корелятора під час відсутності сигналу (рис. 27.2).

Імовірність фіктивної тривоги F - це площа під ділянкою кривої щільності СВ $Z_u^2 = X_u^2 + Y_u^2$, що відповідає $Z_u^2 \geq U_0$.

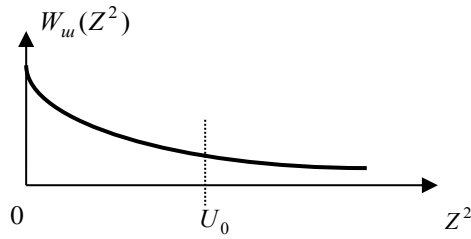


Рис. 27.2

СВ $Z_{uu}^2 = X_{uu}^2 + Y_{uu}^2$ розподілена за експонентним законом:

$$W(Z_{uu}^2) = \frac{1}{N_0 E} \exp\left(-Z_{uu}^2 / N_0 E\right).$$

Як наслідок, імовірність фіктивної тривоги F також описується експонентним законом;

$$F = \exp\left(-\frac{U_0}{N_0 E}\right) = \exp(-l_2), \quad (27.4)$$

де $l_2 = \frac{U_0}{N_0 E}$ - відносний поріг.

Таким чином, графік $F(l_2)$ якісно має вигляд, показаний на рис. 27.3.

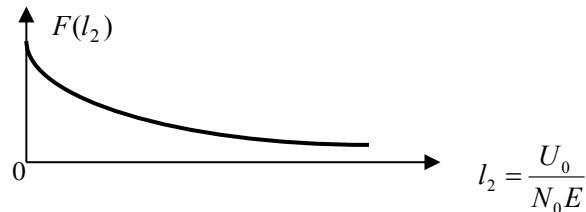


Рис. 27.3

При наявності сигналу розподіл $W_{cu}(Z^2)$ має вигляд одnogорбої кривої (рис. 27.4). Імовірність правильного виявлення D - це площа під ділянкою кривої $W_{cu}(Z^2)$, що відповідає $Z^2 \geq U_0$.

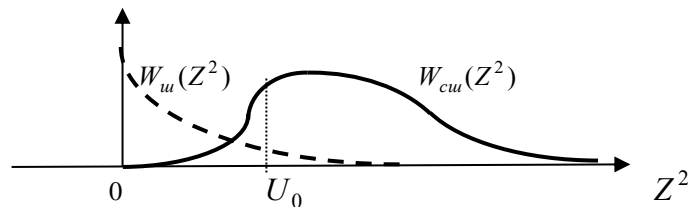


Рис. 27.4

Зі збільшенням відносини сигнал-шум q крива $W_{cu}(Z^2)$ зміщується вправо. Тому очевидно, що при заданій величині F й з ростом q імовірність правильного виявлення D буде монотонно зростати до одиниці. На рис. 27.5 показано сімейство таких залежностей для різних F .

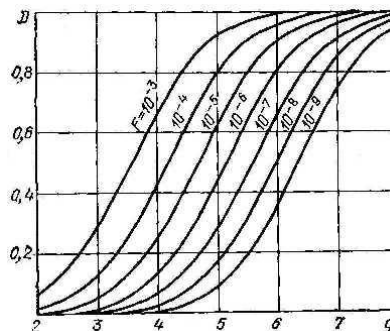


Рис. 27.5

Маючи у своєму розпорядженні графік на рис. 27.5, неважко знайти, що $D = 0,9$ при $F = 10^{-6}$ досягається для відносин q , починаючи із граничного значення $q_n \approx 6.5$ (16.3 дБ).

Моделювання на ПЕОМ

Змодельовати даний фрагмент оптимального виявлювача гармонійного сигналу з невідомою початковою фазою дуже просто: потрібно обчислити *модуль (або квадрат модуля) перетворення Фур'є* від вхідного сигналу.

Змодельуємо ситуацію, що відповідає параметрам сигналу й перешкоди, зазначеним в умові завдання.

Команди для виконання в командному вікні програми Matlab:

```

Fs=12000; dt=1/Fs; f0=3000; A=1;
i=1:12000;
x=A*cos(2*pi*f0*i*dt+2*pi*rand);
sig=2;
n=sig*randn(1,12000);
u1=x+n;
nfft=12000;
z2=abs(fft(u1,nfft));
z2(6002:nfft)=[];
df=Fs/nfft;
f=0:df:Fs/2;
N=nfft/2+1;
n0(1:N)=mean(z2(3500:nfft/2));
plot(f,20*log10(z2),f,20*log10(n0),'g',
f,20*log10(n0)+16.3,'-r')

```

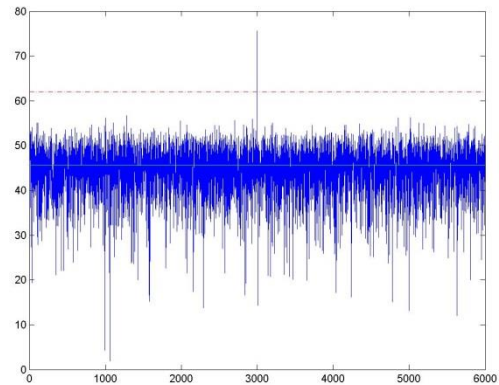


Рис. 27.6

На рис. 27.6 видно спектральний пік, обумовлений наявністю гармонійного сигналу. Істотне перевищення цим піком рівня спектру перешкоди й дає можливість виявлення сигналу на тлі перешкоди. Цікаво було б відобразити на графіку знайдене нами граничне відношення сигнал-шум $q_n \approx 6.5$ (16.3 дБ). Для цього знаходимо середнє значення спектра шуму (усереднюючи значення спектра перешкоди, що лежать у діапазоні частот 3500 - 6000 Гц.) і додаємо до нього 16.3 дБ - це і є граничне значення сигналу (штрихова лінія на рис. 27.6).

Задача 28

Відповідь: двохканальний виявлювач (для сигналу з невідомою початковою фазою) програє одноканальному (для сигналу з відомими параметрами) приблизно в 1.1 рази (0.7 дБ).

Задача 29

Відповідь: $U_0 = 0,043 B^2 c$.

Цифрова фільтрація

Задача 30

Теоретичні відомості

Цифрові фільтри діляться на два великих класи: нерекурсивні й рекурсивні. Вхідним сигналом для цифрових фільтрів є відліки $x(n) = x(nT_d)$, де T_d – період дискретизації безперервного процесу $x(t)$.

Відмінною рисою нерекурсивного цифрового фільтра (НЦФ) є залежність вихідного значення $y(n)$ тільки від вхідних значень у даний момент часу $x(n)$ і попередні моменти $x(n-k)$. Алгоритм (рівняння) НЦФ порядку N записують у вигляді

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k).$$

Для розрахунків зручніше використовувати фільтр порядку $2N$ з алгоритмом фільтрації виду:

$$y(n) = \sum_{k=-N}^N a_k x(n-k) \quad (30.1)$$

Частотна характеристика НЦФ:

$$H_{\partial}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(-j\omega k T_{\partial}). \quad (30.2)$$

Розрахунок коефіцієнтів a_k НЦФ методом оберненого перетворення Фур'є виконується за допомогою співвідношення:

$$a_k = \frac{T_{\partial}}{2\pi} \int_{-\pi/T_{\partial}}^{\pi/T_{\partial}} H(j\omega) \exp(j\omega k T_{\partial}) d\omega, \quad (30.3)$$

де $H(j\omega)$ - частотна характеристика ідеального (із прямокутними фронтами АЧХ) фільтра. Наприклад, для ідеального НЧ фільтра:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & \text{дп.}\omega \end{cases}$$

Оскільки тут $H(j\omega)$ - функція дійсна й парна (рис. 30.1),

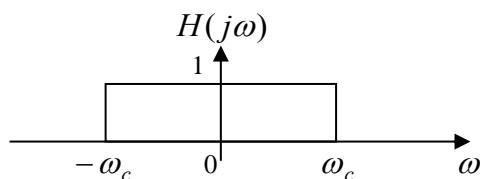


Рис. 30.1

тому з (30.3) одержуємо

$$a_k = a_{-k} = \frac{\Omega_c}{\pi} Sa(k\Omega_c), \quad (30.4)$$

де

$$Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad \Omega_c = \frac{\omega_c}{f_{\partial}} = 2\pi \frac{f_c}{f_{\partial}}.$$

Чисельні розрахунки

Відносна частота зрізу:

$$\Omega_c = 2\pi \frac{2.5}{10} = \frac{\pi}{2}$$

Коефіцієнти фільтра:

$$a_k = a_{-k} = \frac{\Omega_c}{\pi} Sa(k\Omega_c) = \begin{cases} 0.5, & k=0; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}, & k=\pm 1; \\ 0, & k=\pm 2; \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3\pi} = -\frac{1}{3\pi}, & k=\pm 3 \end{cases}$$

Рівняння розрахованого фільтра:

$$y(n) = -\frac{1}{3\pi} x_{n+3} + \frac{1}{\pi} x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{\pi} x_{n-1} - \frac{1}{3\pi} x_{n-3}$$

Частотна характеристика розрахованого фільтра:

$$H_d(\omega) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^N a_k \cos \omega k T_d = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \omega T_d - \frac{2}{3\pi} \cos 3\omega T_d.$$

Моделювання на ПЕОМ

Побудуємо АЧХ розрахованого фільтра. При використанні програми Matlab потрібно виконати наступні команди:

```
[H,f] = freqz(a, 1, 200, 10000);  
figure; plot(f,20*log10(abs(H))); grid on
```

Графік АЧХ показаний на рис. 30.2.

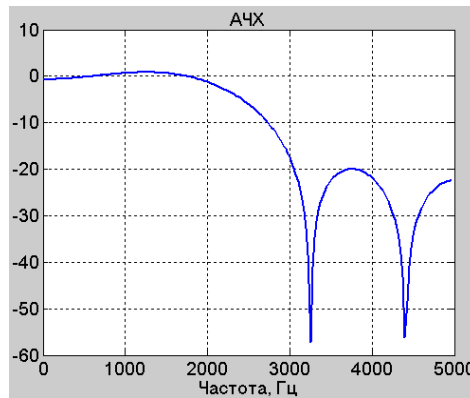


Рис. 30.2

Задача 31

Відповідь: Для парних $a_k = a_{-k}$ частотна характеристика КІХ-фільтра $H_d(\omega)$ дійсна й складається із суми зважених косинусоїд:

$$H_d(\omega) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^N a_k \cos \omega k T_d,$$

а для непарних $a_k = -a_{-k}$ - «чисто» уявна й складається із суми синусоїд:

$$H_d(\omega) = -2j \sum_{k=1}^N a_k \sin \omega k T_d.$$

Задача 32

Відповідь: Для $N=3$ трикутне вагове вікно має вигляд (рис. 32.1а):

$$w_k = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{3}, & |k| \leq 3; \\ 0, & \text{для інших } k \end{cases}.$$

Відкориговані коефіцієнти фільтра:

$$a'_k = w_k a_k.$$

Таким чином, одержуємо:

$$w_0 = 1; \quad w_1 = w_{-1} = 2/3; \quad w_2 = w_{-2} = 1/3; \quad w_3 = w_{-3} = 0,$$

звідки одержуємо

$$a'_0 = 0.5; \quad a'_1 = a'_{-1} = 0.3183 \cdot 2/3 = 0.2122; \quad a'_2 = a'_{-2} = 0; \quad a'_3 = a'_{-3} = 0; .$$

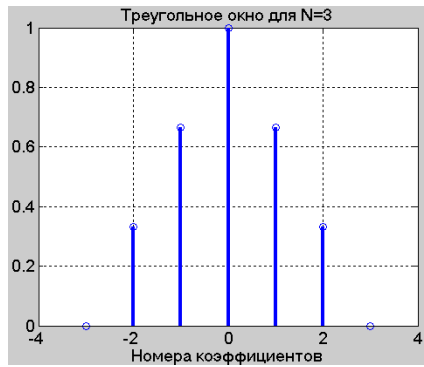


Рис. 32.1а

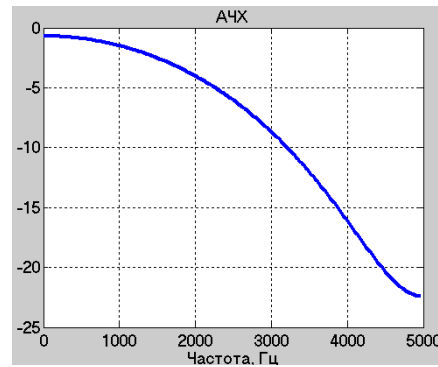


Рис. 32.1б

Моделирование на ПЕОМ

Побудуємо АЧХ розрахованого фільтра. При використанні програми Matlab потрібно виконати наступні команди:

```
w=bartlett(7);
a1=a.*w; % a – вектор коэффициентов, обчислених в задаче 30
[H,f]=freqz(a1, 1, 200, 10000);
figure; plot(f,20*log10(abs(H))); grid on
```

Графік АЧХ показаний на рис. 32.1б.

Задача 33

Відповідь: Перенесемо частину рівняння, що містить коефіцієнти b_k , із правої частини рівняння в ліву частину (при цьому позначимо $b_0 = 1$):

$$\sum_{k=0}^M b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k).$$

Неважко бачити, що ліва і права частини рівняння - це дискретні згортки. З огляду на те, що Z-перетворення дискретної згортки функцій дорівнює добутку Z-перетворень цих функцій, рівняння рекурсивного фільтра можна представити у вигляді:

$$B(z)Y(z) = A(z)X(z),$$

де

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}, \quad Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n}, \quad A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^{-n},$$

причому

$$z = \exp(j\omega T_d).$$

Звідси Z-перетворення передатної функції рекурсивного фільтра:

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}.$$

Задача 34

Відповідь:
$$H_d(\omega) = \frac{T_d}{2j} \cdot \frac{\cos \omega \frac{T_d}{2}}{\sin \omega \frac{T_d}{2}}.$$

Моделирование на ПЕОМ

Побудуємо АЧХ розрахованого фільтра для $F_d = 10000$ Гц. При використанні програми Matlab можна виконати наступні команди:

```
syms f;
```

```
H = abs(cos(pi*f/10000))/ abs(sin(pi*f/10000))/20000;  
ezplot(H,f); grid on
```

Графік АЧХ показано на рис. 34.1.

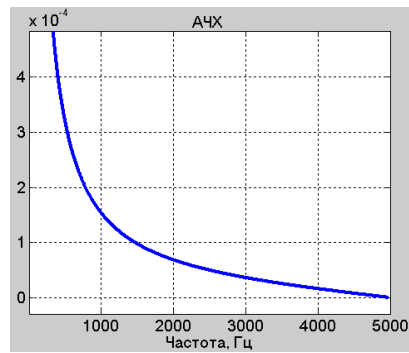


Рис. 34.1

Література

1. Продеус А.М. Комп'ютерна обробка акустичних сигналів [Електронний ресурс]. Навчальний посібник. Київ: КПП, 2018, 237 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/25161>
2. Н.Г. Гаткин, В.А. Геранин, М.И. Карновский, Л.Г. Красный, Помехоустойчивость типового тракта обнаружения сигналов. К.: Техніка, 1971.
3. Н.Г. Гаткин, В.А. Геранин, М.И. Карновский. Интеграторы в системах измерения. Киев : Гостехиздат УССР, 1963.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб: Питер., 2002 г., 606 с.
5. Богнер Р., Константи́нидис А. (ред.) Введение в цифровую фильтрацию. М.: Мир, 1976, 216 с.
6. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том 1. М.: Советское радио, 1972, 744 с.
7. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983, 320 с.
8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга 1. М.: Советское радио, 1969, 752 с.
9. Дідковський В.С., Дідковська М.В., Продеус А.М. Комп'ютерна обробка акустичних сигналів. Навчальний посібник. – К., «Імекс-ЛТД», 2010. – 420 с.
10. Продеус А., Дидковский В., Дидковская М. Акустическая экспертиза и коррекция коммуникационных каналов. Монография. LAP LAMBERT Academic Publishing, OmniScriptum GmbH & Co. KG, Saarbrücken, Deutschland, 2017, ISBN: 978-3-330-04591-0
11. Продеус А.Н. Обзор компьютерных программ для расчета цифровых фильтров, *Электроника и связь*, №19, 2003, с. 62-67.
12. Программа спектрального анализа сигналов SpectraLab <http://dxportal.ru/download/10648-spectralab-moschnyy-dvuhkanalnyy-analizator-spektra.html>